

DOI: 10.31319/2519-8106.1(46)2022.258346

УДК 532.59

**В.В. Наратовий**, к.т.н., доцент, naradvova1986@gmail.com

**Д.С. Харченко**, аспірантка, harcenkodiana5@gmail.com

Центральноукраїнський державний педагогічний університет ім. В. Винниченка,

м. Кропивницький

### ДОСЛІДЖЕННЯ ХВИЛЬОВИХ РУХІВ У ТРИШАРОВІЙ ГІДРОДИНАМІЧНІЙ СИСТЕМІ «ШАР З ТВЕРДИМ ДНОМ – ШАР – ШАР З КРИШКОЮ»

*Досліджується задача поширення хвиль у тришаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар – шар з кришкою». Для першого наближення отримано дисперсійне співвідношення та дві пари коренів. Отримано вирази відношень амплітуд відхилень поверхонь контакту, які відповідають кореням дисперсійного рівняння. Залежності відношень амплітуд від різних фізичних параметрів графічно проілюстровані та проаналізовані.*

**Ключові слова:** відношення амплітуд, хвилі, хвильовий рух.

*The problem of wave propagation in a three-layer hydrodynamic system "layer with a hard bottom - layer - layer with a cover" is investigated. For the first approximation, the variance relation and two pairs of roots are obtained. The expressions of the relations of the amplitudes of the deviations of the contact surfaces, which correspond to the roots of the dispersion equation, are obtained. The dependences of the amplitude relations on different physical parameters are graphically illustrated and analyzed.*

**Keywords:** amplitude ratio, waves, wave motion.

### Постановка проблеми

Дослідження хвильових процесів у рідинах з різним типом стратифікації за густиною проводяться сучасними вченими в натурних умовах та експериментально за допомогою рідинних систем різної структури та за допомогою математичних моделей. Чисельний та фізичний аналіз таких моделей дозволяє не тільки зрозуміти реальні фізичні процеси у Світовому океані, а й слугують теоретичним доповненням для майбутніх експериментів.

Таким чином актуальним є дослідження проблеми поширення слабконелінійних хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар – шар з кришкою».

### Аналіз останніх досліджень та публікацій

Дослідження хвильових процесів у стратифікованих рідинах у системах різного типу є предметом багатьох сучасних досліджень гідродинаміки.

У дослідженні [1] у наближенні Буссінеска розглядаються вільні внутрішні хвилі в двовимірному вертикально неоднорідному стратифікованому потоці з урахуванням обертання Землі. Рівняння для амплітуди вертикальної швидкості фіксованої моди внутрішніх хвиль має комплексні коефіцієнти; отже, власна функція і частота хвилі складні. Встановлено, що уявна частина частоти мала і може бути як позитивною, так і негативною. З цієї причини в залежності від хвильового числа і номера моди можливо як слабке затухання, так і слабке посилення хвилі. Потоки імпульсу вертикальної хвилі відмінні від нуля і можуть перевищувати відповідні турбулентні потоки.

У статті [2] досліджується проблема поширення та взаємодії хвиль вздовж поверхонь контакту у гідродинамічній системі «рідкий півпростір – шар – шар з твердою кришкою». Проаналізовано залежність відношення амплітуд хвиль на поверхнях контакту при різних геометричних та фізичних параметрах системи. Досліджено структуру хвильових рухів на поверхнях контакту.

У статті [3] досліджується явище, коли внутрішні хвилі описують (лінійний) відгук нестисливої стабільно стратифікованої рідини на невеликі збурення. Нахил їх групової швидкості щодо вертикалі повністю визначається їх частотою. Доводиться, що в цій критичній геометрії

слабков'язкі і слабонелінійні хвильові рівняння насправді мають розв'язок, який добре апроксимується сумою падаючого хвильового пакета, відображеної другої гармоніки і деяких членів прикордонного шару.

У дослідженні [4] розглянута теорія тришарових стратифікованих за густиною ідеальних рідин з метою її узагальнення на випадок  $n$ -шарів. Основна увага приділяється структурним властивостям, особливо у випадку жорсткого обмеження верхньої кришки. Показано, що довгохвильова бездисперсійна межа являє собою систему квазілінійних рівнянь, що не допускають інваріантів Рімана. Також обговорюються межа Буссінеска і сімейство спеціальних розв'язків, недавно введених де Мело Віріссімо і Мілевським.

У дослідженні [5] розглядається поширення плоских капілярних гравітаційних відокремлених хвиль постійної форми в тришаровій постановці. Проміжна рідина вважається стратифікованою, а верхня і нижня — однорідними і нескінченно глибокими. Одна або обидві границі розділу схильні до капілярності. Дослідження може бути застосоване до випадку двох глибинних рідин, коли одна з них стратифікована поблизу границі розділу. Останнє формулювання має відношення до досліджень капілярних гравітаційних хвиль в перехідній області між морською водою і рідким вуглекислим газом в глибинах океану.

Показано, що в розглянутій постановці капілярно-гравітаційні відокремлені хвилі кінцевої амплітуди підкоряються інтегрально-диференціальному рівнянню, яке містить закони дисперсії Кортвега-де Фріза (KdV) і Бенджаміна-Воно (БВ), а також специфічну нелінійність, що залежить від властивостей стратифікованого шару.

У роботі [6] було експериментально досліджено поширення високих внутрішніх відокремлених хвиль по великому трикутному гребеню в потоці стратифікованої рідини. Характеристики поширення піднесених ISW над гребенем були виміряні за допомогою приладу для вимірювання хвиль в реальному часі і велосіметрії по зображеннях частинок, відповідно.

У статті [7] для взаємодії з жорсткою пористою структурою у вигляді Т-образної перегородки в умовах плескання моделюється чисельна модель, що містить стратифіковані по щільності шари рідкої нафти і води в прямокутному резервуарі. Для відстеження еволюції міжфазної і вільної поверхневої хвилі з рівняннями Нав'є-Стокса і Брінкмана, які керують потоком нестисливої рідини і потоком через пористу область відповідно, використовується довільний метод Лагранжа-Ейлера.

Серія випадків установки моделюється для спостереження взаємодії шаруватої рідини і міжфазної хвилі з пористою структурою. Аналізується вплив пористої структури і її ефективність в гасінні пов'язаних хвиль коливання і ударного тиску на стінки резервуара при різних конфігураціях установки.

В статті [8] досліджується поширення одновимірних нестационарних хвиль в насиченому багатшаровому ґрунті з рідким поверхневим шаром. На основі теорії Біо для розробки аналітичних / напіваналітичних рішень використовуються метод розкладання за власними функціями, метод матриці переносу, метод простору станів і метод інтегрування точного тимчасового кроку. На численних прикладах аналізується вплив коефіцієнтів динамічної проникності для рідини на перехідну характеристику моделі, що важливо в додатках для морської сейсміки і акустики океану.

У статті [9] представлено явний точний розв'язок нелінійного основного рівняння з членами Коріоліса і доцентровими членами в модифікованому наближенні екваторіальної бета-площини і на довільній широті. Розв'язок описує хвилі в лагранжеві азимутальній екваторіальній пастці, що поширюються на схід в стратифікованій рідині, що обертається.

У статті [10] в рамках рівнянь Нав'є-Стокса для стратифікованої рідини чисельно досліджені динаміка і енергетика лобового зіткнення внутрішніх відокремлених хвиль першої моди в рідині з двома однорідними шарами, розділеними тонким міжфазним шаром. Було показано, що лобове зіткнення внутрішніх відокремлених хвиль малої і помірної амплітуди призводить до малого фазового зсуву і генерації цуга дисперсійних хвиль, що біжать за минулою відокремленою хвилею.

Фазовий зсув зростає зі збільшенням амплітуд взаємодіючих хвиль. Максимальна амплітуда нахату при зіткненні хвиль досягає значення, що перевищує суму амплітуд падаючих

відокремлених хвиль. Перевищення максимальної амплітуди нахату над сумою амплітуд зустрічних хвиль зростає зі збільшенням амплітуди взаємодіючих хвиль малої і помірної амплітуди, тоді як для зустрічних хвиль великої амплітуди воно зменшується.

У роботі [11] розглянуто актуальні задачі, що виникають в океанографії і пов'язані зі стратифікованими течіями, такими як гравітаційні потоки на континентальному схилі біля Антарктичного півострова, де розташована українська антарктична станція «Академік Вернадський», генерацію та поширення внутрішніх хвиль у морях та океанах та їх вплив на перемішування в шельфових зонах.

У дослідженні [13] за допомогою лагранжевого опису руху рідини вивчаються гравітаційні хвилі стоксового типу в системі двох горизонтальних шарів нев'язкої, стратифікованої рідини, що змішується. Показано, що для того, щоб повний вертикально-інтегрований потік Стокса став рівним нулю, щільність повинна бути неперервною на границі розділу.

У роботі [14] досліджувалася модель поширення хвиль у гідродинамічній системі «рідкий шар з твердим дном – рідкий шар з вільною поверхнею». Показано існування внутрішньої і поверхневої складових хвильового поля та проаналізовано їх взаємодію.

#### Формулювання мети дослідження

Метою даної роботи є дослідження проблеми поширення слабконелінійних хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар – шар з кришкою». З використанням методу багатомасштабних розвинень отримати першу лінійну задачу та її розв'язки. Отримати вирази для відношень амплітуд відхилень верхньої та нижньої поверхонь контакту, які відповідають кореням дисперсійного рівняння. Отримати графіки залежності відношень амплітуд від таких фізичних параметрів: товщини верхнього та нижнього шарів, хвильового числа. Провести якісний аналіз поведінки відношень амплітуд.

#### Виклад основного матеріалу

У даній статті досліджується задача поширення хвильових пакетів у тришаровій гідродинамічній системі «шар з твердим дном – шар – шар з кришкою» (рис. 1).

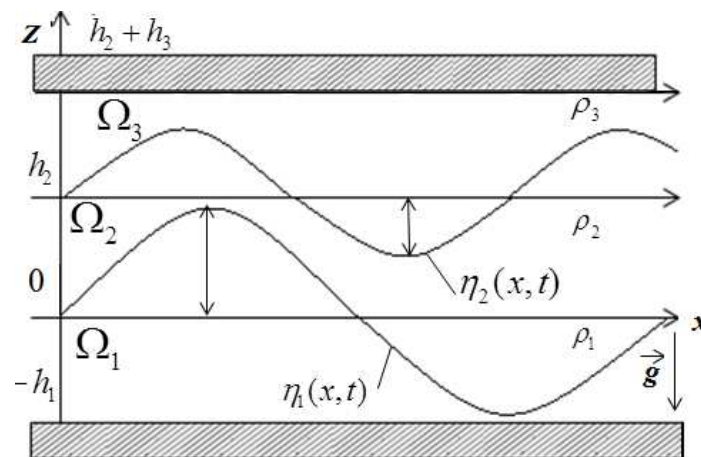


Рис. 1. Постановка задачі

Де  $\Omega_1 = \{(x, z) : |x| < \infty, -h_1 \leq z \leq 0\}$  з густиною  $\rho_1$ ,  $\Omega_2 = \{(x, z) : |x| < \infty, 0 \leq z \leq h_2\}$  з густиною  $\rho_2$ ,  $\Omega_3 = \{(x, z) : |x| < \infty, h_2 \leq z \leq h_2 + h_3\}$  з густиною  $\rho_3$  — нижній, середній та верхній шари відповідно, розділені поверхнями контакту  $z = \eta_1(x, t)$  та  $z = \eta_2(x, t)$ . Верхній шар обмежений кришкою, нижній шар обмежений твердим дном. Сила тяжіння направлена у від'ємному  $z$ -напрямку перпендикулярно до поверхні розподілу.

Математична постановка проблеми виглядає наступним чином: швидкість поширення пакетів

$$\varphi_{j,xx} + \varphi_{j,zz} = 0 \text{ у } \Omega_j, j=1,2,3, \quad (1)$$

кінематичні умови на поверхнях контакту

$$\eta_{1,t} - \varphi_{j,z} = -\varphi_{j,x} \eta_{1,x} \text{ при } z = \eta_1(x, t), \quad j = 1, 2; \quad (2)$$

$$\eta_{2,t} - \varphi_{j,z} = -\varphi_{j,x} \eta_{2,x} \text{ при } z = h_2 + \eta_2(x, t), \quad j = 2, 3, \quad (3)$$

динамічні умови на поверхнях контакту

$$\rho_1 \varphi_{1,t} - \rho_2 \varphi_{2,t} + g(\rho_1 - \rho_2) \eta_1 + \frac{1}{2} \rho_1 (\nabla \varphi_1)^2 - \frac{1}{2} \rho_2 (\nabla \varphi_2)^2 - T_1 \left(1 + (\eta_{1,x})^2\right)^{\frac{3}{2}} \eta_{1,xx} = 0$$

при  $z = \eta_1(x, t)$ ; (4)

$$\rho_2 \varphi_{2,t} - \rho_3 \varphi_{3,t} + g(\rho_2 - \rho_3) \eta_2 + \frac{1}{2} \rho_2 (\nabla \varphi_2)^2 - \frac{1}{2} \rho_3 (\nabla \varphi_3)^2 - T_2 \left(1 + (\eta_{2,x})^2\right)^{\frac{3}{2}} \eta_{2,xx} = 0$$

при  $z = h_2 + \eta_2(x, t)$ , (5)

умова непроникливості на дні

$$\varphi_{1,z} = 0 \text{ при } z = -h_1, \quad (6)$$

умова непроникливості на кришці

$$\varphi_{3,z} = 0 \text{ при } z = h_2 + h_3, \quad (7)$$

де  $\varphi_j$  ( $j = 1, 2, 3$ ) потенціали швидкості частинок в  $\Omega_j$ ,  $\eta_1, \eta_2$  — відхилення поверхонь контакту,  $T_1, T_2$  — коефіцієнти поверхневого натягу на поверхнях контакту,  $g$  — прискорення вільного падіння.

За допомогою методу багато масштабних розвинень, функції відхилення поверхонь контакту та потенціали швидкостей представлено у вигляді

$$\eta_j(x, t) = \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \eta_{jn}(x_0, x_1, x_2, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3), \quad j = 1, 2; \quad (8)$$

$$\varphi_j(x, t, z) = \sum_{n=1}^3 \alpha^{n-1} \varphi_{jn}(x_0, x_1, x_2, z, t_0, t_1, t_2) + O(\alpha^3), \quad j = 1, 2, 3. \quad (9)$$

Задача першого наближення має вигляд

$$\begin{aligned} \varphi_{j1, x_0 x_0} + \varphi_{j1, z z} &= 0 \text{ у } \Omega_j, \quad j = 1, 2, 3; \\ \eta_{11, t_0} - \varphi_{j1, z} &= 0 \text{ на } z = 0, \quad j = 1, 2; \\ \eta_{21, t_0} - \varphi_{j1, z} &= 0 \text{ на } z = h_2, \quad j = 2, 3; \\ \varphi_{11, t_0} - \rho_2 \varphi_{21, t_0} + (1 - \rho_2) \eta_{11} - T_1 \eta_{11, x_0 x_0} &= 0 \text{ на } z = 0; \\ \rho_2 \varphi_{21, t_0} - \rho_3 \varphi_{31, t_0} + (\rho_2 - \rho_3) \eta_{21} - T_2 \eta_{21, x_0 x_0} &= 0 \text{ на } z = h_2; \\ \varphi_{11, z} &= 0 \text{ на } z = -h_1; \\ \varphi_{31, z} &= 0 \text{ на } z = h_2 + h_3. \end{aligned} \quad (10)$$

Наступні дві задачі лінійні задачі наведені у роботі [12].

Для задачі першого наближення виведене дисперсійне співвідношення:

$$\begin{aligned} \frac{\rho_2^2 \omega^4}{\text{sh}^2(kh_2)} - \left( (1 - \rho_2)k + T_1 k^3 - \omega^2 (\text{cth}(kh_1) + \rho_2 \text{cth}(kh_2)) \right) \times \\ \times \left( (\rho_2 - \rho_3)k + T_2 k^3 - \omega^2 (\rho_2 \text{cth}(kh_2) + \rho_3 \text{cth}(kh_3)) \right) = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Отримане дисперсійне співвідношення має дві пари коренів

$$\omega_1^2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad \omega_2^2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (12)$$

де

$$a = \frac{\rho_2^2}{\text{sh}^2(kh_2)} - (\rho_2 \text{cth}(kh_2) + \rho_3 \text{cth}(kh_3)) (\text{cth}(kh_1) + \rho_2 \text{cth}(kh_2));$$

$$b = (\rho_2 \operatorname{cth}(kh_2) + \rho_3 \operatorname{cth}(kh_3))((1 - \rho_2)k + T_1 k^3) + (k(\rho_2 - \rho_3) + T_2 k^3)(\operatorname{cth}(kh_1) + \rho_2 \operatorname{cth}(kh_2));$$

$$c = -(k(\rho_2 - \rho_3) + T_2 k^3)((1 - \rho_2)k + T_1 k^3). \quad (13)$$

Для  $\omega_1$

$$\varphi_{11}^{(1)} = \frac{2\omega_1}{k \operatorname{sh}(kh_1)} \operatorname{ch}(k(h_1 + z)) A \sin(kx - \omega_1 t);$$

$$\varphi_{21}^{(1)} = - \left( \frac{2\omega_1 \operatorname{ch}(k(h_2 - z))}{k \operatorname{sh}(kh_2)} + \frac{2((1 - \rho_2)k + T_1 k^3 - \omega_1^2 \operatorname{cth}(kh_1) - \rho_2 \omega_1^2 \operatorname{cth}(kh_2)) \operatorname{ch}(kz)}{\rho_2 \omega_1 k} \right) A \sin(kx - \omega_1 t);$$

$$\varphi_{31}^{(1)} = \frac{2 \operatorname{sh}(kh_2)((1 - \rho_2)k + T_1 k^3 - \omega_1^2 \operatorname{cth}(kh_1) - \rho_2 \omega_1^2 \operatorname{cth}(kh_2)) \operatorname{ch}(k(h_2 + h_3 - z))}{\rho_2 \omega_1 k \operatorname{sh}(kh_3)} A \sin(kx - \omega_1 t);$$

$$\eta_{11}^{(1)} = 2A \cos(kx - \omega_1 t);$$

$$\eta_{21}^{(1)} = - \frac{\operatorname{sh}(kh_2)((1 - \rho_2)k + T_1 k^3 - \omega_1^2 \operatorname{cth}(kh_1) - \rho_2 \omega_1^2 \operatorname{cth}(kh_2))}{\omega_1^2 \rho_2} 2A \cos(kx - \omega_1 t). \quad (14)$$

Для  $\omega_2$

$$\varphi_{11}^{(2)} = - \frac{2\rho_2 \omega_2^3 \operatorname{ch}(k(h_1 + z)) B \sin(kx - \omega_2 t)}{k \operatorname{sh}(kh_1) \operatorname{sh}(kh_2)((1 - \rho_2)k + T_1 k^3 - \omega_2^2 \operatorname{cth}(kh_1) - \rho_2 \omega_2^2 \operatorname{cth}(kh_2))};$$

$$\varphi_{21}^{(2)} = \left( \frac{\operatorname{ch}(k(h_2 - z)) \rho_2 \omega_2^2}{\operatorname{sh}(kh_2)((1 - \rho_2)k + T_1 k^3 - \omega_2^2 \operatorname{cth}(kh_1) - \rho_2 \omega_2^2 \operatorname{cth}(kh_2))} + \operatorname{ch}(kz) \right) \frac{2\omega_2 B \sin(kx - \omega_2 t)}{k \operatorname{sh}(kh_2)};$$

$$\varphi_{31}^{(2)} = - \frac{2\omega_2 \operatorname{ch}(k(h_2 + h_3 - z)) B \sin(kx - \omega_2 t)}{k \operatorname{sh}(kh_3)};$$

$$\eta_{11}^{(2)} = - \frac{2B \cos(kx - \omega_2 t) \omega_2^2 \rho_2}{\operatorname{sh}(kh_2)((1 - \rho_2)k + T_1 k^3 - \omega_2^2 \operatorname{cth}(kh_1) - \rho_2 \omega_2^2 \operatorname{cth}(kh_2))};$$

$$\eta_{21}^{(2)} = 2B \cos(kx - \omega_2 t). \quad (15)$$

Де  $\eta_{21}^{(1)}$  — хвиля-відгук на хвилю  $\eta_{11}^{(1)}$  з частотою  $\omega_1$  та амплітудою  $A$  на нижній поверхні контакту. А  $\eta_{21}^{(2)}$  є хвилею-відгуком на хвилю  $\eta_{11}^{(2)}$  з частотою  $\omega_2$  та амплітудою  $B$  на верхній поверхні контакту.

Проведемо аналіз модуля відношення амплітуд відхилень нижньої та верхньої поверхонь контакту  $\eta_{11}(x, t)$  та  $\eta_{21}(x, t)$ , що відповідають  $\omega_1^2$  та  $\omega_2^2$  для першої лінійної задачі. Дані модулі відношень позначимо наступним чином

$$a_1 = \left| \frac{\operatorname{sh}(kh_2)((1 - \rho_2)k + T_1 k^3 - \omega_1^2 \operatorname{cth}(kh_1) - \rho_2 \omega_1^2 \operatorname{cth}(kh_2))}{\rho_2 \omega_1^2} \right|;$$

$$a_2 = \left| \frac{\rho_2 \omega_2^2}{\operatorname{sh}(kh_2)((1 - \rho_2)k + T_1 k^3 - \omega_2^2 \operatorname{cth}(kh_1) - \rho_2 \omega_2^2 \operatorname{cth}(kh_2))} \right|, \quad (16)$$

де  $a_1$  та  $a_2$  характеризують внесок хвилі з частотою  $\omega_1$  та  $\omega_2$  відповідно у хвильовий рух на поверхнях контакту.

На рис. 2, 3 представлені графіки залежності величин  $a_1$  та  $a_2$  від товщини нижнього шару  $h_1$  при різних значеннях  $h_3$  та фіксованих параметрів густин середнього та верхнього шарів. Інші параметри набувають таких значень:  $T_1 = 0, T_2 = 0, h_2 = 1, k = 1$ . З малюнків видно, що якісна поведінка відхилення амплітуд однакова. Також видно, що для всіх трьох випадків для кожного значення  $h_3$  існують граничні значення, до яких наближаються абсолютні величини  $a_1$  та  $a_2$ . При чому, зі збільшенням товщини верхнього шару від 1 до 10 граничні значення

величин  $a_1$  та  $a_2$  зменшуються. При цьому, зміна відношення густин якісно не впливає на поведінку відношення амплітуд.

З точки зору збільшення густини верхнього шару, граничні значення величин  $a_1$  та  $a_2$  збільшуються. Збільшення товщини верхнього шару якісно не впливає на поведінку відношень  $a_1$  та  $a_2$ . При  $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.9$  (рис. 2в, рис. 3в) граничне значення, до якого наближаються абсолютні величини  $a_1$  та  $a_2$  однакове.

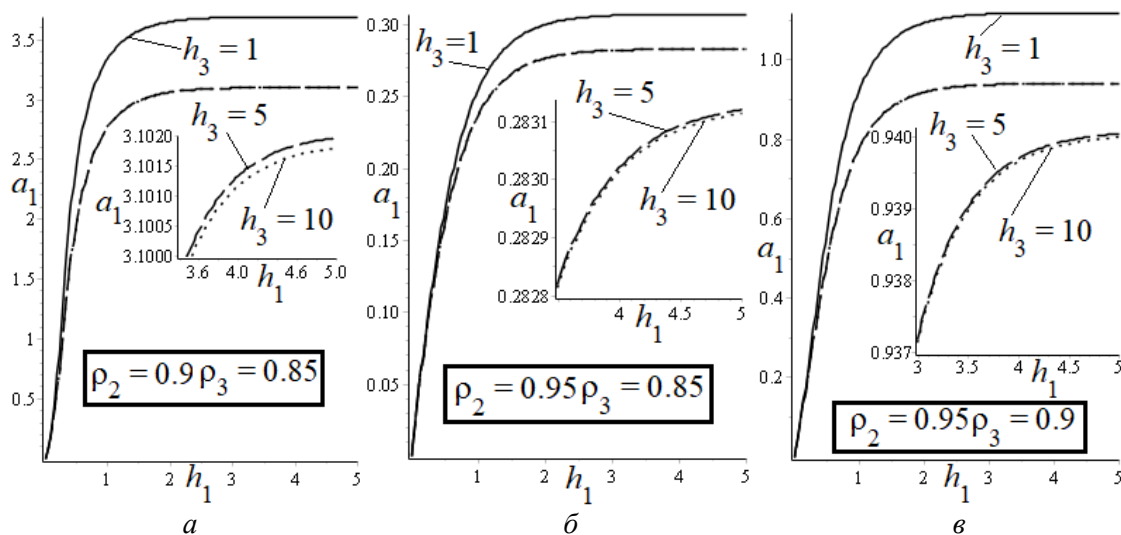


Рис. 2. Залежність відношення амплітуд  $a_1$  від товщини нижнього шару:

$a$  —  $\rho_2 = 0.9, \rho_3 = 0.85$     $б$  —  $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.85$     $в$  —  $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.9$

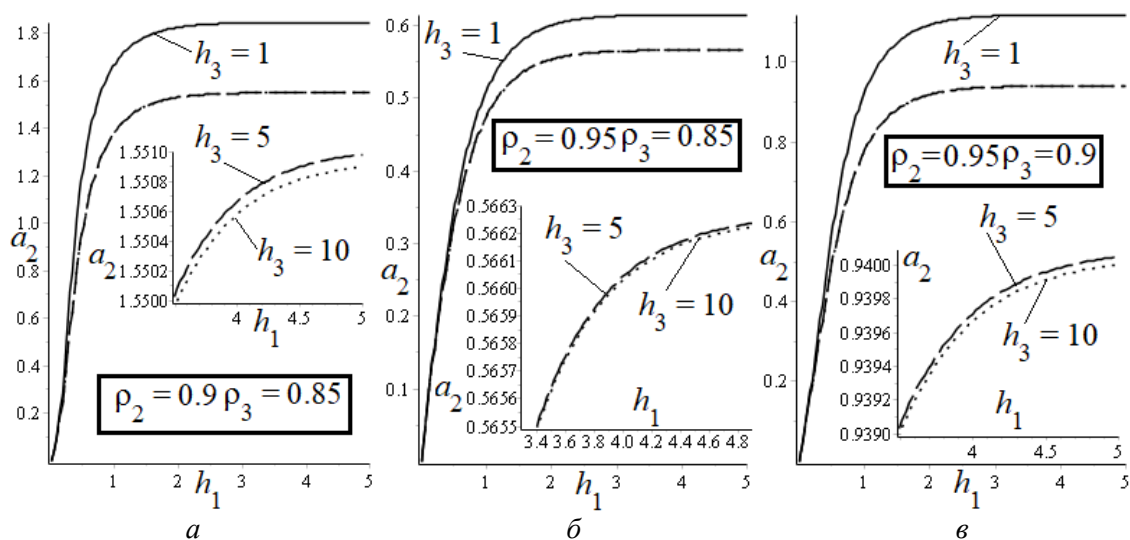


Рис. 3. Залежність відношення амплітуд  $a_2$  від товщини нижнього шару:

$a$  —  $\rho_2 = 0.9, \rho_3 = 0.85$     $б$  —  $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.85$     $в$  —  $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.9$

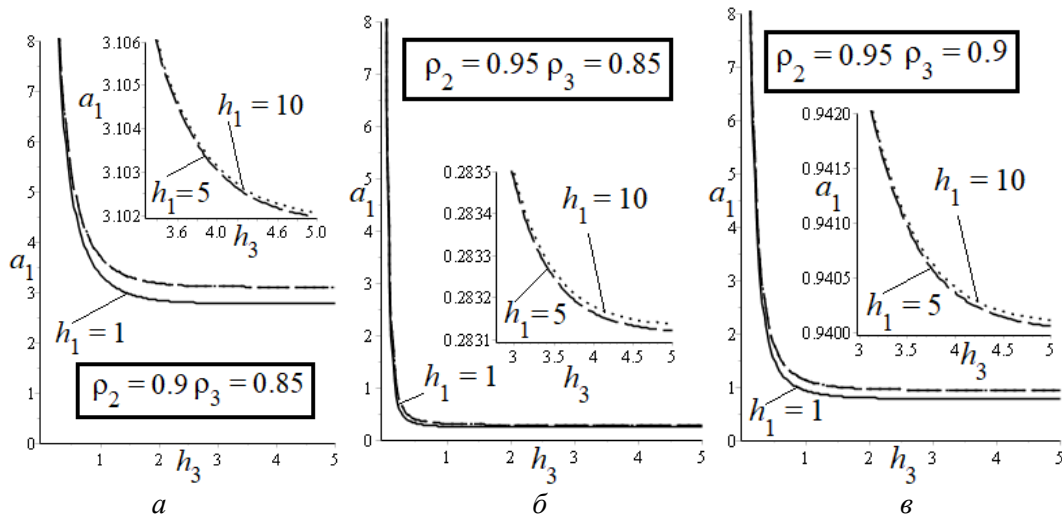


Рис. 4. Залежність відношення амплітуд  $a_1$  від товщини верхнього шару:

$a$  —  $\rho_2 = 0.9, \rho_3 = 0.85$     $\text{б}$  —  $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.85$     $\text{в}$  —  $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.9$

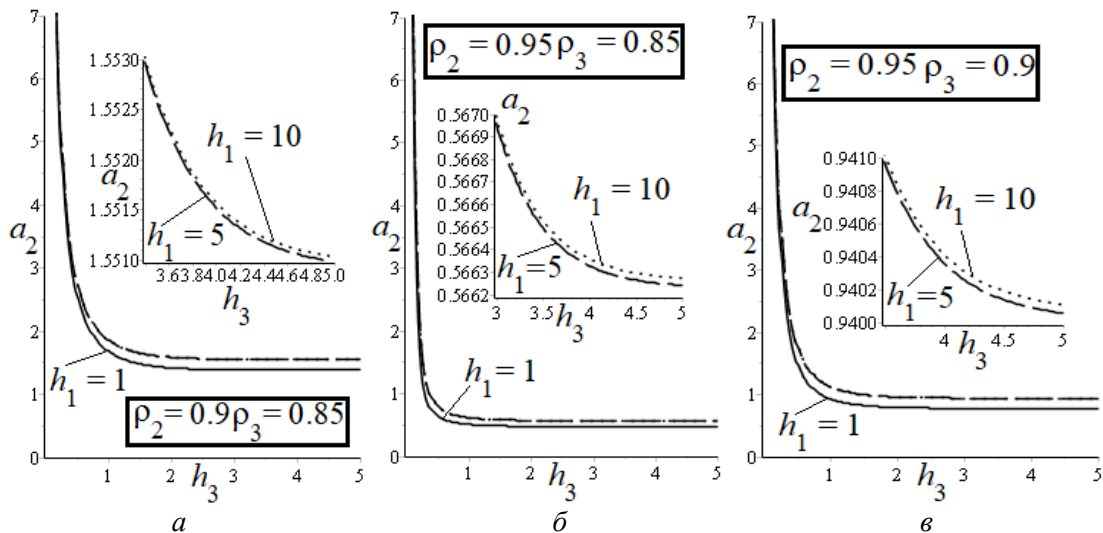


Рис. 5. Залежність відношення амплітуд  $a_2$  від товщини верхнього шару:

$a$  —  $\rho_2 = 0.9, \rho_3 = 0.85$     $\text{б}$  —  $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.85$     $\text{в}$  —  $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.9$

На рис. 4, 5 представлені графіки залежності величин  $a_1$  та  $a_2$  від товщини верхнього шару  $h_3$  для різних значеннях  $h_1$  при фіксованих значеннях густин  $\rho_2$  та  $\rho_3$ . При збільшенні товщини  $h_3$  значення абсолютних величин зменшуються. Для кожного значення товщини нижнього шару  $h_1$  існують відповідні граничні значення, до яких наближаються абсолютні величини  $a_1$  та  $a_2$ . У всіх випадках збільшення товщини нижнього шару призводить до збільшення відповідних граничних значень величин  $a_1$  та  $a_2$ . Зміна густин середнього та верхнього шарів якісно не впливає на поведінку відношень  $a_1$  та  $a_2$ .

При дослідженні зміни товщини  $h_1$  зі збільшенням густини  $\rho_3$  граничні значення обох абсолютних величин також збільшуються. Якісної зміни в поведінці графіків не відбувається. Аналогічно до попереднього випадку при  $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.9$  (рис. 4 в, рис. 5 в) граничні значення відношень  $a_1$  та  $a_2$  співпадають.

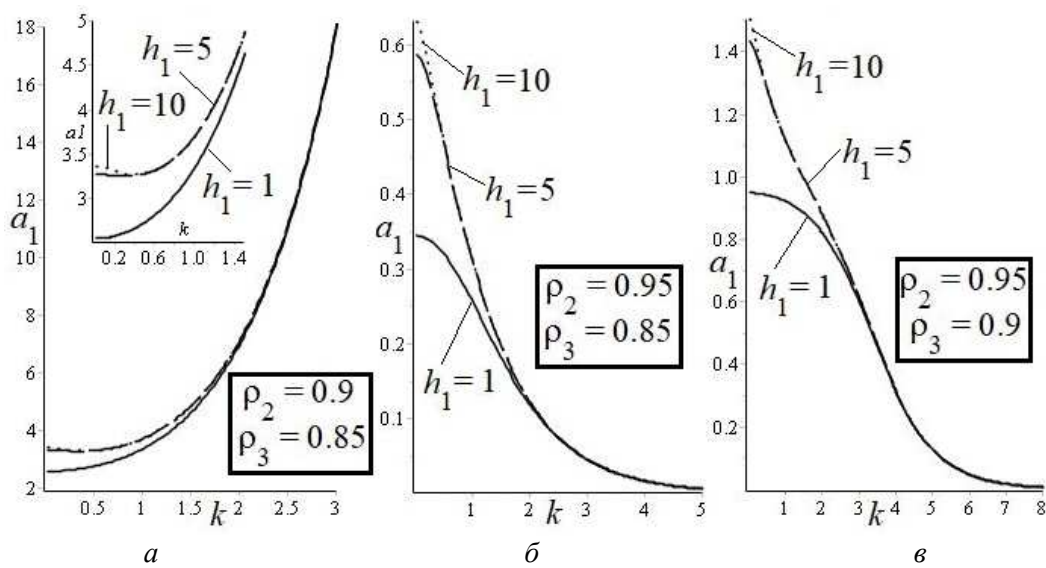


Рис. 6. Залежність відношення амплітуд  $a_1$  від хвильового числа:  
 $a$  —  $\rho_2 = 0.9, \rho_3 = 0.85$      $б$  —  $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.85$      $в$  —  $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.9$

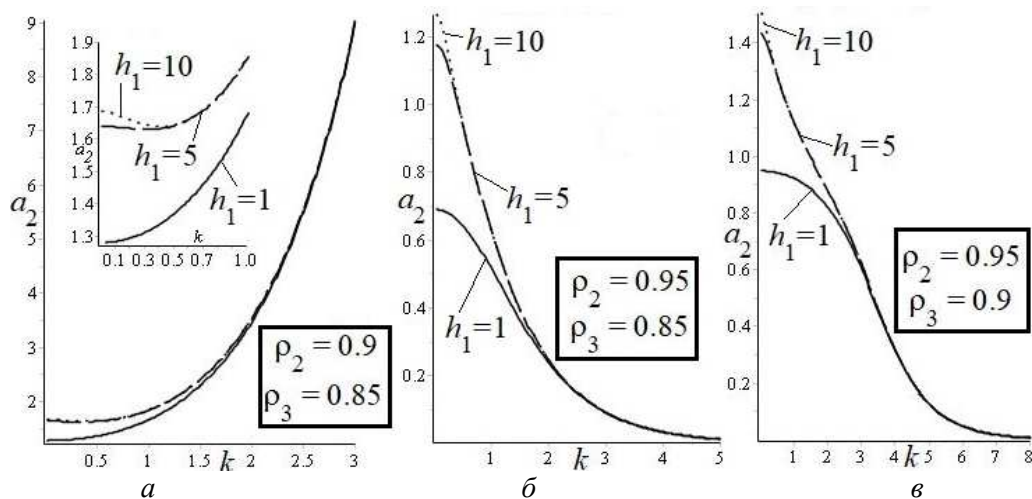


Рис. 7. Залежність відношення амплітуд  $a_2$  від хвильового числа:  
 $a$  —  $\rho_2 = 0.9, \rho_3 = 0.85$      $б$  —  $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.85$      $в$  —  $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.9$

На рис. 6 та 7 наведена залежність відношень  $a_1$  та  $a_2$  від хвильового числа  $k$  для різних значень товщини  $h_1$ . У випадку  $6a$  та  $7a$  (коли  $\rho_2 = 0.9, \rho_3 = 0.85$ ) для гравітаційних та капілярних хвиль зі збільшенням хвильового числа значення величин  $a_1$  та  $a_2$  збільшуються. В інших випадках зі збільшенням хвильового числа значення відхилень амплітуд  $a_1$  та  $a_2$  зменшуються, наближаючись до граничного значення, близького до нуля. Чим більша товщина нижнього шару  $h_1$  тим більше початкове значення абсолютних величин  $a_1$  та  $a_2$ . У відповідних випадках зміни густин  $\rho_2$  та  $\rho_3$  поведінка відхилень амплітуд  $a_1$  та  $a_2$  є аналогічною. У випадках  $6в, 7в$  також спостерігається рівність абсолютних величин для капілярних та гравітаційних хвиль.



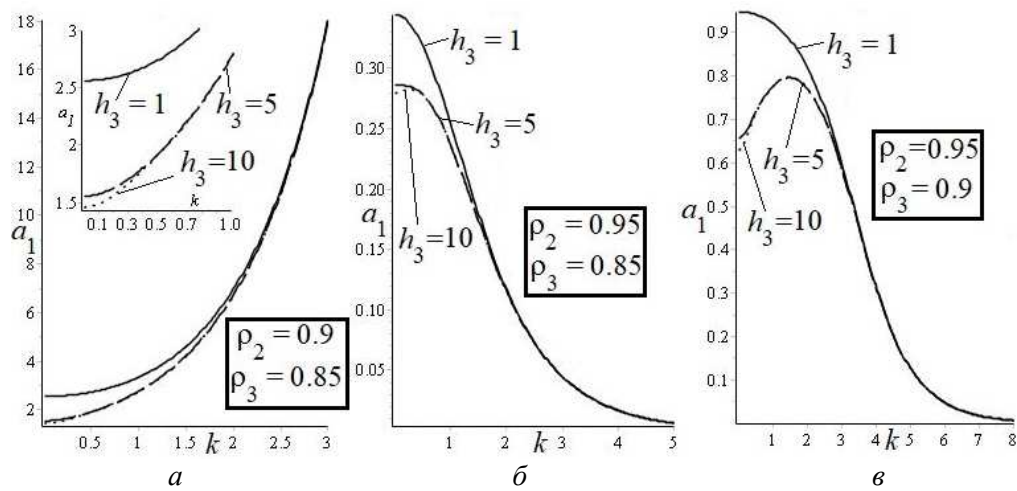


Рис. 8. Залежність відношення амплітуд  $a_1$  від хвильового числа:  
 $a$  —  $\rho_2 = 0.9, \rho_3 = 0.85$     $б$  —  $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.85$     $в$  —  $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.9$

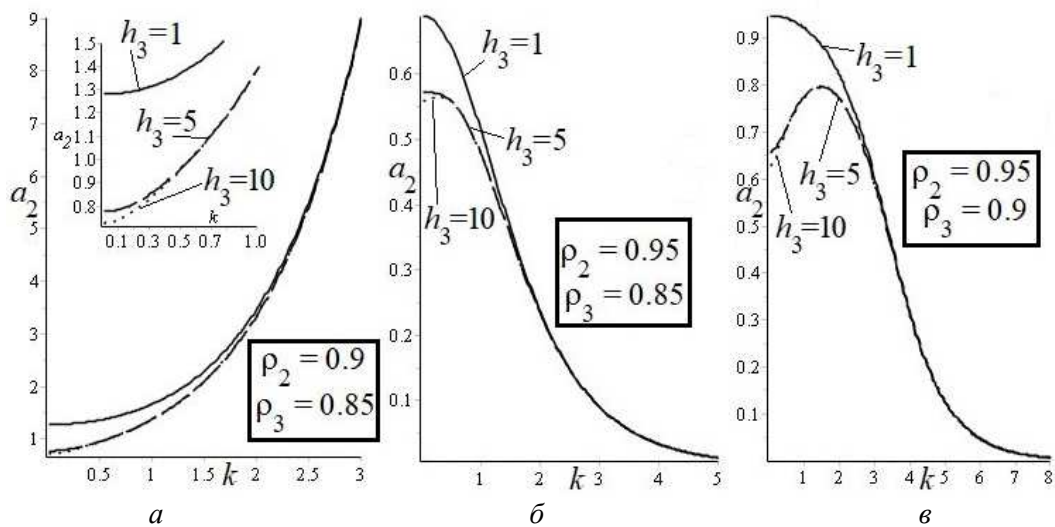


Рис. 9. Залежність відношення амплітуд  $a_2$  від хвильового числа:  
 $a$  —  $\rho_2 = 0.9, \rho_3 = 0.85$     $б$  —  $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.85$     $в$  —  $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.9$

На рис. 8, 9 представлено залежність абсолютних величин  $a_1$  та  $a_2$  від хвильового числа для різних значень товщини верхнього шару  $h_3$  для різних фіксованих значень  $\rho_2$  та  $\rho_3$ . При  $\rho_2 = 0.9, \rho_3 = 0.85$  величини  $a_1$  та  $a_2$  зростають зі збільшенням хвильового числа для гравітаційних та капілярних хвиль, в інших випадках зміни густин  $\rho_2$  та  $\rho_3$  — починаючи з деякого значення хвильового числа зменшуються, наближаючись до нуля. Більше значення товщини верхнього шару відповідає меншому початковому значенню величин  $a_1$  та  $a_2$  (для гравітаційних хвиль). Поведінка відхилень амплітуд у відповідних випадках зміни густин середнього та верхнього шарів аналогічна. При  $\rho_2 = 0.95, \rho_3 = 0.9$  (рис. 8в, рис. 9в) має місце рівність абсолютних значень  $|a_1| = |a_2|$ . Зі збільшенням значення  $\rho_3$  (рис. 8б—в, рис. 9б—в) відповідні максимальні значення абсолютних величин  $a_1$  та  $a_2$  збільшуються.

### Висновки

Досліджувалася задача поширення хвиль у тришаровій системі «шар з твердим дном – шар – шар з кришкою». Для задачі першого наближення виведено дисперсійне співвідношення та дві пари коренів. Отримано вирази відношень амплітуд відхилень поверхонь контакту, які відповідають кореням дисперсійного рівняння. Графічно проілюстрована та проаналізована залежність відношень амплітуд від різних фізичних параметрів (товщини верхнього та нижнього шарів, хвильового числа) при зміні товщини нижнього і верхнього шарів та густин середнього та верхнього шарів.

Графіки залежності відношень амплітуд  $a_1$  та  $a_2$  від  $h_1$  та  $h_3$  у всіх випадках прямують до певного граничного значення не залежно від зміни густин середнього та верхнього шарів. Проте при залежності відношень амплітуд  $a_1$  та  $a_2$  від  $h_1$  величини  $a_1$  та  $a_2$  збільшуються до граничного значення, при залежності відношень амплітуд від  $h_3$  — зменшуються.

Графіки залежності  $a_1$  та  $a_2$  від хвильового числа показують, що у випадку, коли  $\rho_2 = 0.9, \rho_3 = 0.85$  при різних значеннях товщини нижнього шару значення відношень амплітуд збільшуються зі зменшенням довжини хвилі, в інших випадках зміни густин значення  $a_1$  та  $a_2$  зменшуються, наближаючись до певного граничного значення.

При зміні товщини верхнього шару  $h_3$  значення величин  $a_1$  та  $a_2$  при  $\rho_2 = 0.9, \rho_3 = 0.85$  також зростають для капілярних і гравітаційних хвиль. В інших випадках після деякого числа  $k$  значення величин  $a_1$  та  $a_2$  зменшуються і в області капілярних хвиль при великих значеннях хвильового числа  $k > 8$  графіки для відповідних значень товщини  $h_3$  співпадають, наближаючись до нуля.

Також виявлено випадки рівності абсолютних значень величин  $|a_1| = |a_2|$ .

### Список використаної літератури

1. Ankudinov N.O., Slepyshev A.A. Vertical Momentum Transfer Induced by Internal Waves in a Two-Dimensional Flow. *Fluid dynamics*. 2021. Vol. 56, No. 3, P. 343–352.
2. Avramenko O., Lunyova M., Naradovyi V. Wave propagation in a three-layer semi-infinite hydrodynamic system with a rigid lid. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 2017. Vol. 5, No. 5, P. 58–66.
3. Bianchini R., Dalibard A.L., Saint-Raymond L. Near-critical reflection of internal waves. *Analysis & PDE*. 2021. Vol. 14, No. 1, P. 205–249.
4. Camassa R., Falqui G., Ortenzi G., Pedroni M., Ho T. T. V. Hamiltonian Aspects of Three-Layer Stratified Fluids. *Journal of nonlinear science*. 2021. Vol. 31, No. 4, P. 70.
5. Derzho O.G. Large amplitude capillary-gravity solitary waves in a stratified fluid sandwiched between two deep homogeneous layers. *CHAOS*. 2021. Vol. 31, No. 6, 063104.
6. Du H., Wang S.D., Wang X.L., Xu J.N., Guo H.L., Wei G. Experimental investigation of elevation internal solitary wave propagation over a ridge. *Physics of fluids*. 2021. Vol. 33, No. 4, 042108.
7. Kargbo O., Xue M.A., Zheng J.H., Yuan X.L. Multiphase sloshing dynamics of a two-layered fluid and interfacial wave interaction with a porous T-shaped baffle in a tank. *Ocean engineering*. 2021. Vol. 229, 108664.
8. Shan Z.D., Jing L.P., Zhang L., Xie Z.N., Ling D.S. Transient wave propagation in a multi-layered soil with a fluid surface layer: 1D analytical/semi-analytical solutions. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*. 2021. Vol. 45, No. 13, P. 2001–2015.
9. Su D. Exact azimuthal equatorially trapped waves with centripetal force in modified equatorial beta-plane approximation and at arbitrary latitude. *Monatshefte für mathematik*. 2021.
10. Terletska K., Jung K.T., Maderich V., Kim K.O. Frontal collision of internal solitary waves of first mode. *Wave Motion*. 2018. Vol. 77, P. 229–242.

11. Terletska K.V. Modeling of gravity currents in oceans and inland reservoirs. *According to the materials of scientific report at the meeting of the Presidium of NAS of Ukraine: Visn. Nac. Akad. Nauk Ukr.*, Kyiv, 11 September 2019., Kyiv, P. 31–37.
12. Naradovyi V., Kharchenko D. Investigation of the energy of wave motions in a three-layer hydrodynamic system. *Waves in Random and Complex Media*, 2019. Vol. 31, No. 6, P. 1729–1748.
13. Weber J.E. H., Christensen K.H. On the singular behavior of the Stokes drift in layered miscible fluids. *Wave motion*. 2021. Vol. 102, 102712.
14. Наратовий В.В., Селезов І.Т., Авраменко О.В., Гуртовий Ю.В. Нелінійна взаємодія внутрішніх і поверхневих гравітаційних хвиль у двошаровій рідині з вільною поверхнею. *Математичні методи та фізико-механічні поля*. 2016. № 52(1), 72–83.

**INVESTIGATION OF WAVE MOVEMENTS IN THE THREE-LAYER  
HYDRODYNAMIC SYSTEM "LAYER WITH HARD BOTTOM – LAYER –  
LAYER WITH COVER"**

**Naradovyi V., Kharchenko D.**

**Abstract**

Modeling of wave motions in stratified liquids of different types makes it possible to study similar wave processes in the ocean and predict their behavior.

The aim of this article is to study the problem of propagation of weakly nonlinear wave packets in a three-layer hydrodynamic system "layer with a hard bottom – layer – layer with a cover".

Using the method of multiscale developments, the first linear problem is obtained, the variance relation and two pairs of roots are derived. Expressions for the relations of amplitudes of deviations of contact surfaces corresponding to the roots of the dispersion equation are obtained. The dependence of amplitude relations on different physical parameters (thickness of upper and lower layers, wave number) when changing the thickness of lower and upper layers and densities of middle and upper layers is graphically illustrated and analyzed.

Graphs of the dependence of the ratios of the amplitudes  $a_1$  and  $a_2$  on  $h_1$  and  $h_3$  in all cases go to a certain limit value, regardless of changes in the densities of the middle and upper layers. However, if the ratios of the amplitudes  $a_1$  and  $a_2$  depend on  $h_1$ , the values of  $a_1$  and  $a_2$  increase to the limit value, and if the ratios of the amplitudes depend on  $h_3$ , they decrease.

Graphs of the dependence of  $a_1$  and  $a_2$  on the wave number show that in the case when  $\rho_2 = 0.9, \rho_3 = 0.85$  at different values of the thickness of the lower layer, the values of the amplitude ratios increase with decreasing wavelength. In other cases density changes values  $a_1$  and  $a_2$  decrease, approaching a certain limit value.

When the thickness of the upper layer  $h_3$  changes, the values of  $a_1$  and  $a_2$  at  $\rho_2 = 0.9, \rho_3 = 0.85$  also increase for capillary and gravitational waves. In other cases, after a certain number  $k$ , the values of  $a_1$  and  $a_2$  decrease, and in the region of capillary waves at large values of the wave number  $k > 8$ , the graphs for the corresponding values of the thickness  $h_3$  coincide, approaching zero. There are also cases of equality of absolute values of  $|a_1| = |a_2|$ .

The results of the study can be applied in oceanography, hydrodynamics, biomechanics, in some branches of shipbuilding.

**References**

- [1] Ankudinov N.O., Slepyshev A.A. (2021). Vertical Momentum Transfer Induced by Internal Waves in a Two-Dimensional Flow. *Fluid dynamics*. 56(3), 343-352. doi: 10.1134/S0015462821030022
- [2] Avramenko O., Lunyova M., Naradovyi V. (2017). Wave propagation in a three-layer semi-infinite hydrodynamic system with a rigid lid. *Eastern-European Journal of Enterprise Technologies*. 5(5), 58-66. doi: 10.15587/1729-4061.2017.111941
- [3] Bianchini R., Dalibard A.L., Saint-Raymond L. (2021). Near-critical reflection of internal waves. *Analysis & PDE*. 14(1), 205–249. doi: 10.2140/apde.2021.14.205
- [4] Camassa R., Falqui G., Ortenzi G., Pedroni M., Ho T. T. V. (2021). Hamiltonian Aspects of Three-Layer Stratified Fluids. *Journal of nonlinear science*. 31(4), 70. doi: 10.1007/s00332-021-09726-0
- [5] Derzho O.G. (2021). Large amplitude capillary-gravity solitary waves in a stratified fluid sandwiched between two deep homogeneous layers. *CHAOS*. 31(6), 063104. doi: 10.1063/5.0047032
- [6] Du H., Wang S.D., Wang X.L., Xu J.N., Guo H.L., Wei G. (2021). Experimental investigation of elevation internal solitary wave propagation over a ridge. *Physics of fluids*. 33(4), 042108. doi: 10.1063/5.0046407
- [7] Kargbo O., Xue M.A., Zheng J.H., Yuan X.L. (2021). Multiphase sloshing dynamics of a two-layered fluid and interfacial wave interaction with a porous T-shaped baffle in a tank. *Ocean engineering*. 229, 108664. doi: 10.1016/j.oceaneng.2021.108664
- [8] Shan Z.D., Jing L.P., Zhang L., Xie Z.N., Ling D.S. (2021). Transient wave propagation in a multi-layered soil with a fluid surface layer: 1D analytical/semi-analytical solutions. *International journal for numerical and analytical methods in geomechanics*. doi: 10.1002/nag.3253
- [9] Su D. (2021). Exact azimuthal equatorially trapped waves with centripetal force in modified equatorial beta-plane approximation and at arbitrary latitude. *Monatshefte für mathematik*. doi: 10.1007/s00605-021-01565-1
- [10] Terletska K., Jung K.T., Maderich V., Kim K.O. Frontal collision of internal solitary waves of first mode. *Wave Motion*. 2018. 77: 229. DOI: <https://doi.org/10.1016/j.wavemoti.2017.12.006>
- [11] Terletska K.V. (2019). Modeling of gravity currents in oceans and inland reservoirs. *According to the materials of scientific report at the meeting of the Presidium of NAS of Ukraine: Visn. Nac. Akad. Nauk Ukr.*, 11 September 2019., P. 31–37.
- [12] Naradovyi V., Kharchenko D. (2019). Investigation of the energy of wave motions in a three-layer hydrodynamic system. *Waves in Random and Complex Media*, 31(6), 1729–1748. doi: 10.1080/17455030.2019.1699674
- [13] Weber J. E. H., Christensen K.H. (2021). On the singular behavior of the Stokes drift in layered miscible fluids. *Wave motion*. 102, 102712. doi: 10.1016/j.wavemoti.2021.102712
- [14] Naradovyi, V.V., Selezov, Y.T., Avramenko, O.V., & Hurtovyi, Yu. V. (2016). Neliniina vziaemodiia vnutrishnikh i poverkhnevnykh hravitatsiinykh khvyl u dvosharovii ridyny z vilnoiu poverkhneu [Nonlinear interaction of internal and surface gravitational waves in a two-layer liquid with a free surface]. *Matematychni metody ta fizyko-mekhanichni polia - Mathematical methods and physical and mechanical fields*, 52(1), 72–83 [in Ukrainian].