

DOI: 10.31319/2519-8106.1(46)2022.258353

УДК 519.233, 519.245

**В.І. Авраменко**, к.т.н., доцент, avicx@i.ua

**В.О. Стросьва**, к.ф.-м.н., доцент, vikastroeva@ukr.net

Дніпровський державний технічний університет, м. Кам'янське

## СТАТИСТИЧНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ВЛАСТИВОСТЕЙ СТЕПЕНЕВИХ РОЗПОДІЛІВ

*З використанням методів статистичного моделювання досліджено параметри розподілу випадкових променів над прямою та площиною. Показано, що введені степеневі розподіли дозволяють більш точно врахувати особливості розподілу джерела чи властивостей середовища.*

**Ключові слова:** випадкові промені, степеневі розподіли.

*Using the methods of statistical modeling, the parameters of distribution of random rays over the line and plane were studied. It is shown that the power distributions introduced allow you to more accurately take into account the peculiarities of the distribution of the source or properties of the environment.*

**Keywords:** random rays, power distributions.

### Постановка проблеми

Задачі про розподіл випадкових променів і хорд часто розглядалися в різній інтерпретації [1, с.39, с.107], що приводило неодноразово до “парадоксів” [2]. В той же час для чітко сформульованих моделей можна отримати однозначні результати. Для простих геометричних тіл нами раніше отримані аналітичні чи статистичні розподіли параметрів — для сфери [3] і кубу [4]. Нижче розглянуто особливості розподілу випадкових променів в загальному випадку розташування джерела променів над віссю і над площиною.

### Аналіз останніх досліджень та публікацій

Для моделі точкового джерела з рівномірним на інтервалі  $(-\pi/2, \pi/2)$  розподілом променів отримано вираз розподілу абсцис перетину випадкового променів з прямою у вигляді розподілу Коші з параметром  $a$  [5, с. 73]. Нами раніше було розширено клас розподілів від точкового джерела до розподілу Стьюдента з дробовим аргументом [7] і досліджено властивості сімейства  $a$ -розподілів. В подальшому групу степеневих розподілів було поширено на випадок джерела над площиною [9]. Введення груп степеневих розподілів було виконано з чисто формальних позицій. На основі цього з'явився інтерес провести дослідження законів розподілу випадкових променів з точкового джерела при різних властивостях джерела чи середовища, через яке проходять промені. Нижче методами статистичного моделювання показано, що конкретним моделям відповідають степеневі розподіли з різними параметрами.

### Формулювання мети дослідження

Метою роботи є дослідження статистичними методами параметрів розподілу координат перетину випадкових променів з екраном від точкового джерела шляхом використання введених раніше розподілів із щільністю виду  $f(x) = C_{k,a} \cdot (1 + x^2/a^2)^{-k}$  на осі і над площиною  $f(x,y) = C_{k,h} \cdot (1 + x^2/h^2 + y^2/h^2)^{-k}$ . Отримані результати узгоджуються з теоретичними викладками для розглянутих моделей.

### Виклад основного матеріалу

**Група  $a$ -розподілів.** При введенні розподілу Коші з параметром  $a$  було зроблено припущення про рівномірний закон розподілу кутів променів з джерела на інтервалі  $(-\pi/2, \pi/2)$ . При цьому припускається, що інтенсивність джерела є рівномірною і енергія джерела досить велика або середовище, через яке проходять промені, є абсолютно прозорим. В інших випадках закон розподілу проєкцій променів буде дещо іншим. Введене в роботі [7] розширення групи степеневих розподілів може врахувати ці обмеження, що робить  $a$ -розподіли більш універсальними.

Аналітичний вираз щільності розподілу для групи  $a$ -розподілів записується у вигляді

$$f(x) = \frac{c_k}{a} (1 + (x/a)^2)^{-k} \quad a > 0, k > 0,5, \quad -\infty < x < \infty, \quad (1)$$

де оцінений статистично множник  $c_k = 0,0336 + 0,6577 \cdot \ln(k + 0,500)$ ,  $R^2 = 0,996$ . При рівномірному на інтервалі  $(-\pi/2, \pi/2)$  розподілі променів з джерела  $k = 1$ ,  $c_k = 1/\pi$  і має місце розподіл Коші. На рис. 1 наведені графік приведених відносних частот розподілу Коші, обчислений за інтегральною функцією розподілу [5], і гістограма результатів статистичного моделювання, параметр  $a = 1$ . Результати статистичного моделювання адекватні теоретичній кривій. В подальшому при порівнянні різних моделей наводяться обвідні статистичних гістограм як більш інформативні, ніж гістограми.

При відмінному від рівномірного законі розподілу кутів променів з джерела і незмінному параметрі  $a$  закон розподілу абсцис перетину променів з прямою суттєво міняється. На рис. 2 наведені графіки відносних частот, коли промені розподілені на інтервалі  $(-\pi/2, \pi/2)$ , але за нормальним законом розподілу Гауса з параметрами  $(0, \pi/4)$  та  $(0, \pi/6)$  (тут і далі  $a = 1$ ). Апроксимація методом найменших квадратів (МНК) отриманих статистичних розподілів степеневими показала, що з коефіцієнтом детермінації  $R^2 = 0,98$  модельні і регресійні криві практично співпадають. Значення параметру  $k$  можна оцінити як по максимальному значенню відносно частоти  $w(0)$  за формулою  $k_1 = \exp\left(\frac{w(0) - 0,0336}{0,6577}\right) - 0,5$ , так і з використанням всіх значень приведених відносних частот на інтервалі  $(-3, 3)$ , коли величина  $k_2$  визначається МНК при фіксованому  $a$ . Зокрема, для розподілу променів за законом Гауса з параметрами  $(0, \pi/4)$  отримані значення  $k_1 = 1,50$  і  $k_2 = 1,49$ , для розподілу променів з параметрами  $(0, \pi/6)$  отримано  $k_1 = 2,34$ ,  $k_2 = 2,36$ . В той же час апроксимація статистичних розподілів нормальним не дозволяє отримати коефіцієнт детермінації  $R^2$  більшим за 0,50, що є мало прийнятним.



Рис. 1. Порівняння розподілів

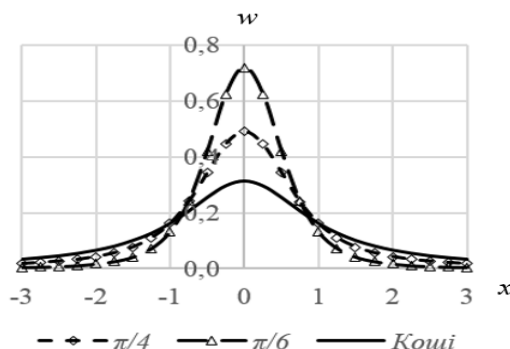


Рис. 2. Розподіли при нерівномірній щільності джерела

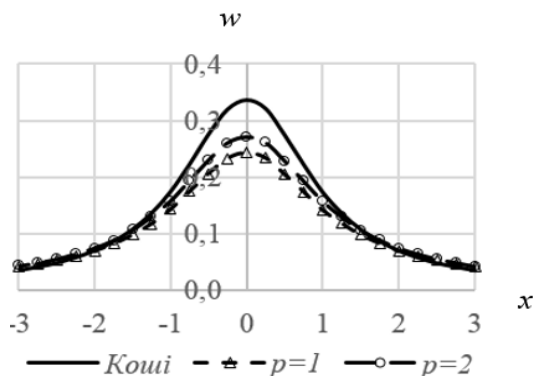


Рис. 3. Розподіли при антимодальній щільності джерела

Отже, можна зробити висновок, що при збільшенні локалізації розподілу променів з джерела параметр  $k$  апроксимуючого степеневого розподілу збільшується. Ця властивість підтверджується моделями з “антимодальним” розподілом напрямків променів з джерела (симетричний розподіл, щільність якого має вид  $f(x) = c_{p,q}(p + qx^2)$  з мінімумом при  $x = 0$ ). Результати наведені на рис. 3,  $q = 1$ . Модельна крива більш згладжена у порівнянні з розподілом Коші, і отримані такі значення: при  $p = 1$   $k_1 = 0,875$  ( $k_2 = 0,89$ ), при  $p = 2$   $k_1 = 0,93$  ( $k_2 = 0,96$ ), тобто в обох випадках  $k < 1$ .

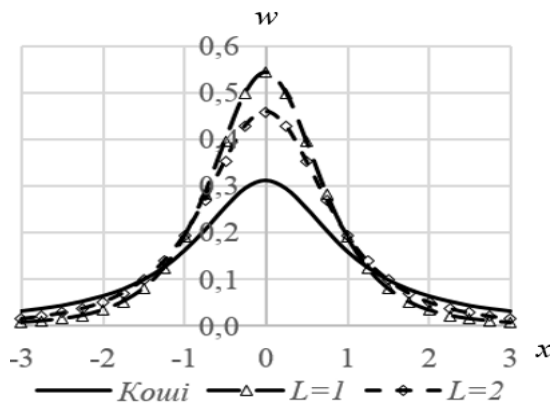


Рис. 4. Розподіли при непрозорому середовищі

**Група степеневих  $h$ -розподілів на площині.** Степеневі розподіли променів над площиною були введені за аналогією з  $a$ -розподілами, без розгляду конкретної моделі. Для щільності розподілу абсцис точок перетину випадкових променів з площиною від джерела на відстані  $h$  від площини запропоновано формулу

$$f(x, y) = \frac{k-1}{\pi \cdot h^2} \cdot \left(1 + \left(\frac{x}{h}\right)^2 + \left(\frac{y}{h}\right)^2\right)^{-k} \quad k > 1, \quad -\infty < x, y < \infty. \quad (2)$$

При статистичному моделюванні рівномірного у півпросторі  $z < 0$  розподілу променів є кілька можливих алгоритмів. Можна вважати розподіл рівномірним у півпросторі, якщо він забезпечує однакову ймовірність на кожному елементі поверхні сфери  $\Delta s = \Delta u \cdot \Delta v$  радіусу, для визначеності,  $R = 1$ , де  $\Delta u$  — довжина дуги по горизонталі (“по паралелі”),  $\Delta v$  — розмір дуги по вертикалі (“по меридіану”). Рівномірність розподілу значень  $\Delta u$  забезпечується рівномірним розподілом на інтервалі  $(-\pi, \pi)$  полярного кута  $\varphi$ , для чого достатньо генерувати послідовності незалежних  $x$  і  $y$ , рівномірно розподілених на інтервалі  $(-1, 1)$  і враховувати тільки ті пари чисел точки  $N$ , які задовольняють умові  $x_N^2 + y_N^2 < 1$ .

Дещо складніше забезпечити однакову ймовірність влучення на інтервал  $\Delta v$ . Площа поверхні шарового поясу пропорційна його висоті  $\Delta h$ , яка пов'язана з елементом поверхні сфери  $\Delta v$  формулою  $\Delta h = \Delta v \cdot \sin \theta$ , де  $\theta$  — широта елемента  $\Delta s$ , тобто полярний кут  $\theta$  між віссю апікат і напрямом на елемент  $\Delta s$ ,  $\theta \in (0, \pi/2)$ . Усі промені виходять з центру сфери (джерела променів), і моделі можуть відрізнятися між собою алгоритмом вибору точки  $M$ , через яку проходять промені. Якщо точки  $M$  вибирати на перетині променів з рівномірно розподіленими кутами  $\theta$  з поверхнею сфери, то не враховується нелінійність залежності між  $\Delta h$  та  $\Delta v$ . Якщо координати точки  $M$  вибирати на поверхні сфери з координатами  $z_M = \sqrt{1 - (x_N^2 + y_N^2)}$ , то за результатами статистичного моделювання отримано, що щільність розподілу кута  $\theta$  описується формулою  $f(\theta) = \sin(2\theta)$ ,  $0 < \theta < \pi/2$ . Нарешті, якщо точки  $M$  заповнюють весь об'єм сфери, то отримано розподіл кутів  $\theta$  зі щільністю  $f(\theta) = \sin \theta$ ,  $0 < \theta < \pi/2$ . Саме таке співвідношення відповідає залежності між висотою шарового поясу  $\Delta h$  та елементом поверхні сфери  $\Delta v$ . Тому такий алгоритм був використаний при статистичному моделюванні.

Моделювався розподіл точок  $M$  у півкулі радіусом  $R = 1$  з центром в точці джерела променів,  $x_N$  і  $y_N$  є випадкові числа, рівномірно розподілені на інтервалі  $(-1, 1)$ , а  $z_M$  рівномірно розподілено на інтервалі  $(0, 1)$ . Використовуються тільки ті трійки координат, які задовольняють умові  $z_M^2 + x_N^2 + y_N^2 < 1$ . Через ці точки проводились промені з центру півкулі і обчислювались координати  $(x_i, y_i)$  їх перетину з площиною на відстані  $h$  від джерела. Результати моделювання засвідчили, що максимальне значення частоти, у відповідності до формули (2), обе-

Інше припущення при введенні розподілу Коші з параметром  $a$  — абсолютна прозорість середовища, коли всі промені досягають екрану. Було розглянуто модель рівномірного розподілу напрямків променів на інтервалі  $(-\pi/2, \pi/2)$ , коли довжина променів розподілена за показниковим законом  $f(l) = \lambda \cdot \exp(-\lambda \cdot l)$   $0 < l < \infty$  з середнім значенням  $L = 1/\lambda$ . На рис. 4 наведені результати моделювання, всі графіки статистичних частот більш локалізовані у порівнянні з розподілом Коші. Апроксимація степеневими розподілами показала, що при  $L = 2$  величини параметру розподілу  $k_1 = 1,41$  ( $k_2 = 1,44$ ) і при  $L = 1$   $k_1 = 1,67$  ( $k_2 = 1,71$ ). Таким чином, чим менше прозорість середовища, тим більше розподіли проекцій променів відрізняються від розподілу Коші.

рнено пропорційно квадрату величини  $h$ , а відносні частоти обернено пропорційні квадрату величини кроку обчислення гістограм.

Не було очевидним, яке значення матиме параметр  $k$  при рівномірному розподілі променів з джерела. Аналіз результатів статистичного моделювання  $h$ -розподілів дозволив оцінити значення параметру  $k$  для прийнятої моделі рівномірного розподілу променів з джерела.

В табл. 1 для різних величин  $h$  наведені значення  $k_1$ , отримані з використанням максимального значення  $k_1 = 1 + w(0,0) \cdot \pi \cdot h^2$ , і значення  $k_2$ , отримані МНК з використанням приведених статистичних частот  $w(x, 0)$  на осьовому перетині на інтервалі  $(-3, 3)$ . Дані статистично стабільні і можна прийняти, що розподілу координат перетину променів при рівномірному в півпросторі розподілі променів відповідає значення параметру  $k = 1,50 = 3/2$  у формулі (2).

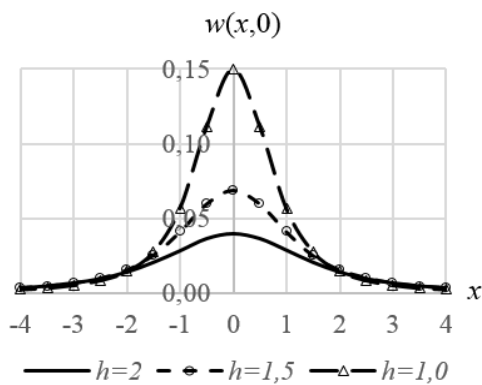


Рис. 5. Графіки осевих перетинів при рівномірному розподілі

статистичному моделюванні та з використанням інтегральної функції  $F(x, y)$  для степеневого  $h$  — розподілу (при виведенні формули прийнято  $k=1,5$ ).

$$F(x, y) = \frac{1}{2\pi} \left( \arctan \frac{x \cdot y}{h\sqrt{h^2 + x^2 + y^2}} + \arctan \frac{x}{h} + \arctan \frac{y}{h} \right) + \frac{1}{4} \quad -\infty < x, y < \infty. \quad (3)$$

Можна відмітити дещо незвичне положення графіків відносно один до одного: для одновимірних розподілів площі під графіками відносних частот повинні бути однаковими, в той час як для двовимірних симетричних розподілів мають бути однаковими об'єми конічних тіл з твірною  $w(x, 0)$ . Дійсно, суми всіх відносних частот на площині на інтервалі  $-10 < x < 10$ ,  $-10 < y < 10$  для кожної моделі близькі до 1.

Для степеневих  $h$ -розподілів також актуальним є питання про залежність параметрів розподілу від впливу нерівномірності розподілу з джерела чи обмеженої прозорості середовища.

На рис. 6, 7, 8 наведені графіки осевих перетинів приведеної статистичної щільності розподілів для різних моделей розподілу променів з джерела, у всіх випадках  $h = 2$ , крок фіксації значень частоти  $\Delta x = 0,5$ .

При нормальному двовимірному розподілі променів з джерела (рис. 6) криві більш локалізовані в порівнянні з рівномірним розподілом і отримані такі значення параметру  $k$ :

при  $S_x = S_y = 0,8$  величини  $k_1 = 1,65$  ( $k_2 = 1,64$ );

при  $S_x = S_y = 0,5$  величини  $k_1 = 1,96$  ( $k_2 = 1,91$ ).

(Нагадаємо, що для рівномірного у півпросторі джерела значення  $k$  близькі до 1,50). Слід відмітити, що при нормальному розподілі променів з джерела розподіл координат суттєво відрізняється від двовимірного нормального розподілу, коефіцієнт детермінації  $R^2$  не перевищує 0,60, в той час як при апроксимації  $h$ -розподілом  $R^2 = 0,995$ .

Таблиця 1. Значення параметру  $k$  для різних  $h$

$h$	1	1,5	2	3	4	5
$k_1$	1,492	1,486	1,493	1,498	1,503	1,503
$k_2$	1,494	1,492	1,495	1,499	1,501	1,499

На жаль, графічне зображення поверхонь  $w(x, y)$  не є ілюстративним, тому обмежимося графіками приведеної статистичної частоти по осьовому перетину. На рис. 5 наведені такі графіки при рівномірному розподілі променів з джерела для різних  $h$ . Обчислені значення  $k$  наведені в табл. 1. Про адекватність прийнятої моделі, яка представляє рівномірний розподіл променів у півпросторі, свідчить повне співпадіння частот, обчислених при статистичному моделюванні та з використанням інтегральної функції  $F(x, y)$  для степеневого  $h$  — розподілу (при виведенні формули прийнято  $k=1,5$ ).

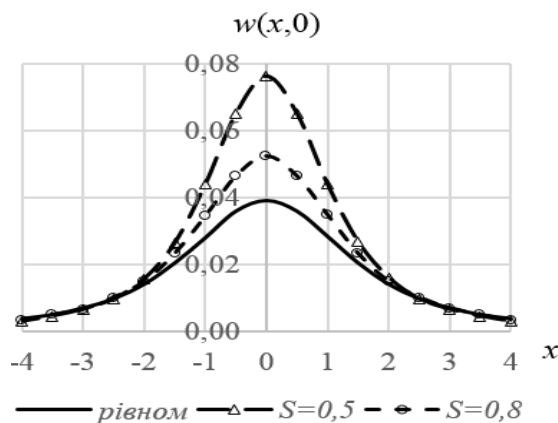


Рис. 6. Осьові перетини при нормальному розподілі променів

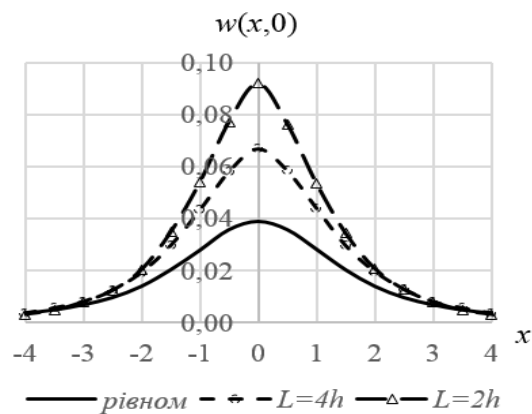


Рис. 7. Осьові перетини при різній довжині променів

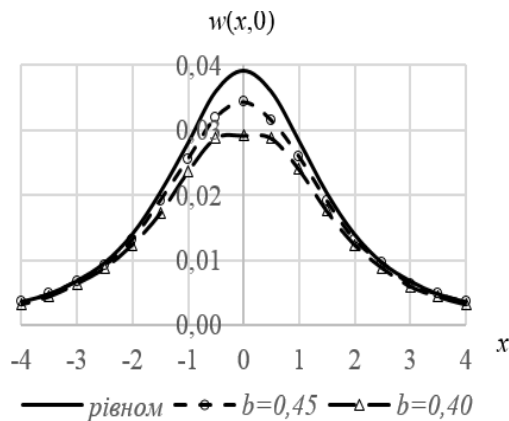


Рис. 8. Осьові перетини для джерела з антимодальним розподілом

Аналогічна картина має місце для непрозорого середовища, коли не всі промені досягають екрану (рис. 7). Як і для  $a$ -розподілів, використана модель рівномірного у півпросторі розподілу променів, довжини яких мають показниковий розподіл з середнім значенням  $L$  (нагадаємо, розглядаються моделі  $h = 2$ ). За результатами статистичного моделювання розподіли більш локалізовані і для параметру  $k$  отримані такі значення:

при  $L = 4h$  величини  $k_1 = 1,73$  ( $k_2 = 1,83$ );

при  $L = 2h$  величини  $k_1 = 2,16$  ( $k_2 = 2,12$ ).

На рис. 8 наведені графіки осьових перетинів для джерела з антимодальним розподілом  $f(r) = C_b(b + (1 - 2b) \cdot r)$ , де  $r \in (0, 1)$ . Як і для  $a$ -розподілів, криві статистичних частот більш згладжені у порівнянні з розподілом для рівномірного джерела, а параметр  $k$  розподілу менше стандартного  $k = 1,5$ :

при  $b = 0,45$  величини  $k_1 = 1,43$  ( $k_2 = 1,44$ );

при  $b = 0,40$  величини  $k_1 = 1,37$  ( $k_2 = 1,39$ ).

В той же час виконана МНК обробка результатів статистичного моделювання при одночасному знаходженні обох параметрів розподілу —  $k$  і  $h$  (як і  $k$  та  $a$ ) — показала, що коефіцієнт детермінації завжди зростає і складає  $R^2 \approx 0,99$ , однак внаслідок особливостей рельєфу цільової функції результативні значення параметрів  $a$  та  $h$  важко піддаються інтерпретації.

### Висновки

В цілому методами статистичного моделювання підтверджено, що степеневі розподіли можуть краще відображати особливості розподілів променів з джерела для різних моделей. Оцінено ступінь залежності параметрів розподілу від моделей — чим більша локалізація, тим більше значення показника степеню  $k$  при фіксованому  $h$  чи  $a$ .

Окремої уваги заслуговує в подальших дослідженнях факт аналогії математичних формул, які описують розподіл координат перетину випадкових променів з екраном і розподіл значень вертикальної складової сили тяжіння як для плоскої, так і для просторової моделей.

### Список використаної літератури

1. Сборник задач по математике для вузов. Специальные курсы. / Э. А. Вуколов, А. В. Ефимов, В. Н. Земсков и др. М.: Наука, 1984. 608 с.
2. Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике. / Г. Секей, пер. с англ. М.: Мир, 1990. 240 с.
3. Строева В. О., Авраменко В. І. Дослідження розподілу випадкових хорд у сфері. *Математичне моделювання*, № 2 (39), Кам'янське, Україна, 2018. С. 30–36.
4. Строева В. О., Авраменко В. І. Куб у полі випромінювання. *Математичні проблеми технічної механіки та прикладної математики* : зб. тез доп. наук.-практ. конф., м. Дніпро, Кам'янське, Україна. 2019. С. 29–31.
5. Теория вероятностей и математическая статистика. / И. И. Гихман, А. В. Скороход, М. И. Ядренко – 2-е изд. К.; Высш. шк. 1988. 439 с.
6. Авраменко В. І., Карімов І. К. Теорія ймовірностей і математична статистика: навч. посіб. Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2009. 254 с.
7. Авраменко В.І., Строева Г.В. Властивості сімейства  $a$ -розподілів. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем (МПЗІС-2020)*. Дніпро, Україна, 2020. 288 с.
8. Михайлов Г. А., Войтишек А. В. Численное статистическое моделирование: методы Монте-Карло. М.: 2006. – 212 с.
9. Авраменко В.І., Строева Г.В. Властивості степеневих розподілів на площині. *Проблеми математичного моделювання*. Матеріали всеукр. наук.-метод. конф. Кам'янське, Україна, 2021. С. 59–61.

### STATISTICAL STUDY OF THE PROPERTIES OF POWER DISTRIBUTIONS Avramenko V., Stroieva V.

#### Abstract

The laws of distribution of random rays to the screen from a point source are investigated by statistical methods. The previously introduced [1, 2] distributions from the group of power species were used  $f(x) = C_{k,a} \cdot (1 + x^2/a^2)^{-k}$  and  $f(x, y) = C_{k,h} \cdot (1 + x^2/h^2 + y^2/h^2)^{-k}$  for the case on the axis and on the plane, respectively.

It has been shown that the use of power distributions allows more accurately describing the laws of distribution of projection coordinates for different models of ray distribution from the source or properties of the environment through which rays pass.

For a source over a line in the case of uniform distribution of rays from the source, the law of the Cauchy distribution ( $k = 1$ ) is true, for more complex models it is proposed to use  $a$ -distributions. They can be considered an extension of the Student distribution, including fractional values of parameters.

For sources above the plane,  $h$ -distributions of the power type are entered. It is shown that even in half the space of ray distribution from the source corresponds to the distribution of the coordinates of rays in the plane at a distance of  $h$  with a power of  $k = 1.5$ .

Statistical modeling methods estimated that in cases of distribution more localized compared to uniform, during approximation of statistical distribution significantly increases the value of the parameter  $k$  power distribution. Similar conclusions are obtained for the case of a not quite transparent environment, when not all rays reach the screen: the shorter the rays, the greater the parameter  $k$  of the appraising distribution.

**Referencer**

- [1] Vukolov, E.A., Efimov, A.V., Zemskov, V.N., Zolotariov, I.U.G., Karakulin, A.F., Pospelov, A.S., et al. (1984). *Sbornik zadach po matematike dlia vtuzov. Specialnie kursi [Collection of problems in mathematics for higher education institutions. Special courses]*. M.: Nauka, [in Russian].
- [2] Sekey G. (1990). *Paradoksi v teorii veroiatnostej i matematicheskoj statistike [Paradoxes in probability theory and mathematical statistics]*. / trans. from English. M.: Mir, [in Russian].
- [3] Stroieva V.O., Avramenko V.I. (2018). Doslidshennia rozpodilu vipadkovih hord v koli. [Research of distribution of random chords in the sphere]. *Matematichne modeljuvannja – Mathematical Modeling*, № 2 (39), Kamyanske, Ukraine, 30–36 [in Ukrainian].
- [4] Stroieva V.O., Avramenko V.I. (2019). Kub v poli viprominjuvannja [Cube in the field of radiation]. *Matematichni problem tehnicnoi mehaniki ta prikladnoi matematiki – Mathematical problems of technical mechanics and applied mathematics*. Conference materials. (p.p. 29–31), Dnipro, Kamyanske, [in Ukraine].
- [5] Gikhman, I.I., Skorokhod, A.V., Yadrenko, M.I. (1988). *Teorija verojatnostej i matematicheska ja statistika [Probability theory and mathematical statistics]*. 2nd out. – K.; Vyshcha shk. [in Russian].
- [6] Avramenko V.I., Karimov I.K. (2009). *Teorija imovirnosti i matematichna statistika [Probability theory and mathematical statistics]*. Textbook. manual. Dniprodzerzhynsk: DSTU, [in Ukraine].
- [7] Avramenko V.I., Stroieva G.V. (2020). Vlastivosti simejstva  $a$ -rozpodiliv [Properties of the family of  $a$ -distributions]. *Matematichne i programne zabezpechennja intelektualnih sistem – Mathematical and software of intelligent systems (MPZIS-2020)*. (pp.19-20). Dnipro. [in Ukraine].
- [8] Mikhailov G.A., Voytyshek A.V. (2006). *Chislennoe statisticheskoe modelirovanie: metodi Monte-Karlo [Numerical statistical modeling: Monte Carlo methods]*. M. [in Russian].
- [9] Avramenko V.I., Stroieva G.V. (2021). Vlastivosti stepenevih rozpodiliv na ploschini [Properties of power distributions on the plane]. *Problemi matematichnogo modeljuvannja – Problems of mathematical modeling – Materials all-Ukrainian scientific method conf.* (pp. 59–61) Kamyanske, Ukraine. [in Ukraine].