

DOI: 10.31319/2519-8106.2(47)2022.268385

UDC 004.02:519.63:669.717

**R. Voloshyn**, senior lecturer, volosinruslan4276@gmail.com

**M. Babenko**, Candidat of Technical Sciences, assistant professor, mvbab@ukr.net

**N. Lyamar**, head of the laboratory, ninel-71@ukr.net

**A. Gromovoy**, student, gromovoj@ua.fm

Dniprovsky State Technical University, Kamianske

## FEATURES OF THE IMPLEMENTATION OF THE ECONOMIC DIFFERENCE SCHEME OF VARIABLE DIRECTIONS WHEN SOLVING THE PROBLEM OF MELTING A WEIGHTED COMBINED ALUMINUM-CONTAINING DEOXIDIZER IN A PROTECTIVE SHELL

*The purpose of this article is to study the efficiency of using an economical alternating direction difference scheme in solving the problem of melting a weighted combined aluminum-containing cylindrical deoxidizer in a protective shell in the melt and under asymmetric boundary conditions at the slag-metal interface. Such a problem refers to problems of heat conduction with moving phase boundaries. When solving such problems of mathematical physics, the computational costs for solving difference analogues of partial differential equations are decisive, which increase sharply with upscaling in the nodes of the computational grid, especially in two- and three-dimensional spaces. The use of an economical difference scheme of alternating directions in solving the problem of melting a weighted combined aluminum-containing cylindrical deoxidizer in a protective shell makes it possible to reduce the calculation time by an average of ten percent.*

**Keywords:** *economical difference scheme, alternating direction method, simulation of melting of an aluminum-containing deoxidizer.*

*Метою даної статті є дослідження ефективності використання економічної різницевої схеми змінних напрямків при вирішенні задачі плавлення обваженого комбінованого алюмомісткого розкислювача циліндричної форми в захисній оболонці в розплаві і за несиметричних граничних умов на міжфазній межі шлак-метал. Така задача відноситься до задач теплопровідності з рухомими межами розподілу фаз. При вирішенні подібних задач математичної фізики визначальними є обчислювальні витрати на рішення різницевих аналогів диференціальних рівнянь в частинних похідних, які різко зростають зі збільшенням вузлів розрахункової сітки, особливо у дво- і тривимірних просторах. Використання економічної різницевої схеми змінних напрямків при вирішенні задачі плавлення обваженого комбінованого алюмомісткого розкислювача циліндричної форми в захисній оболонці дозволяє зменшити час виконання розрахунків в середньому на десять відсотків.*

**Ключові слова:** *економічна скінченно-різницева схема, метод змінних напрямків, моделювання плавлення алюмомісткого розкислювача.*

### Formulation of the problem

One of the resource-saving solutions for the deoxidation of steel with aluminum is to increase the density of the aluminum ingot by introducing a weighting agent and simultaneously isolating its surface from the influence of oxidizing slag [1]. The problem of melting such a weighted combined aluminum-containing deoxidizer of a cylindrical shape in a protective shell in the melt and under asymmetric boundary conditions at the slag-metal interphase boundary refers to the problems of thermal conductivity with moving boundaries of the phase distribution.

Heat and mass transfer processes in systems with moving phase boundaries are described by nonlinear partial differential equations. The field of application of analytical methods for the study of this kind of processes is very limited. Therefore, the most effective calculation of transfer processes when the aggregate state changes is associated with the use of numerical methods [2].

The numerical solution of boundary value problems for ordinary differential equations and partial differential equations is one of the central problems of mathematical modeling in this area. The

choice of effective methods (direct and iterative) plays an important role in solving systems of linear equations of high order with matrices of a special form resulting from the approximation of differential equations. When choosing one or another numerical method and algorithm, many circumstances are considered, such as the volume of calculations, the required amount of RAM, the order of accuracy, stability in relation to rounding errors, and others.

#### Analysis of recent research and publications

Conducting computational experiments using classical sequential algorithms of grid methods [3-5], it was concluded that when solving similar problems of mathematical physics, the computational costs for solving difference analogues of ordinary differential equations and partial differential equations, which increase sharply with the increase of nodes, are decisive calculation grid. Therefore, the issue of their effective implementation is particularly relevant.

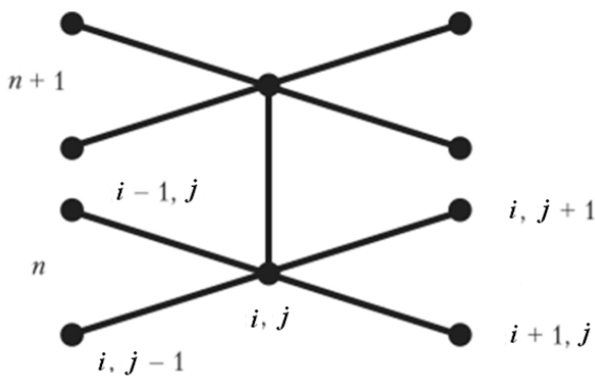


Fig. 1. Template of finite-difference approximation

The numerical study of non-stationary processes of heat transfer in two- and three-dimensional spaces is fundamentally more difficult than the solution of problems in the one-dimensional case. At the same time, the construction of difference analogs of boundary value problems does not cause difficulties [6, 7]. So, for example, for the two-dimensional heat conduction equation.

$$\frac{\partial t}{\partial \tau} = a \left( \frac{\partial^2 t}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} \right) \quad (1)$$

the following approximations can be easily obtained by replacing each of the derivatives with their finite-difference analogues according to the template (Fig. 1)

$$\frac{t_{i,j}^{n+1} - t_{i,j}^n}{\Delta \tau} = a \frac{t_{i-1,j}^n - 2t_{i,j}^n + t_{i+1,j}^n}{\Delta x^2} + a \frac{t_{i,j-1}^n - 2t_{i,j}^n + t_{i,j+1}^n}{\Delta y^2}, \quad (2)$$

$$\frac{t_{i,j}^{n+1} - t_{i,j}^n}{\Delta \tau} = a \frac{t_{i-1,j}^{n+1} - 2t_{i,j}^{n+1} + t_{i+1,j}^{n+1}}{\Delta x^2} + a \frac{t_{i,j-1}^{n+1} - 2t_{i,j}^{n+1} + t_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y^2}, \quad (3)$$

where  $t_{i,j}^n$  is the temperature at the point with coordinates  $(x_i, y_j)$  at the moment of time  $\tau_n$  ( $x_i = i\Delta x$ ,  $y_j = j\Delta y$ ,  $\tau_n = n\Delta \tau$ );  $\Delta y$  is a step along the  $y$  coordinate. However, the volume of calculations required for the implementation of difference schemes (2), (3) increases significantly compared to similar one-dimensional problems. In the case of the explicit scheme (2), this is related to its conditional stability and the consequent necessity to take very small values. In the case of the implicit scheme (3), the increase in the volume of calculations is due to the fact that the resulting system of equations contains 5 unknowns in each equation. Therefore, for the solution of such a system of equations, the running method cannot be applied, and it is necessary to use much more time-consuming methods (for example, the Gaussian method). It is proved that a complete calculation according to scheme (2) requires  $\approx N^4$  actions, and according to scheme (3)  $\approx N^5$  actions, where  $N$  is the number of nodes for each of the spatial coordinates. In the case of three-dimensional problems, these indicators are even higher:  $\approx N^5$  actions for an explicit scheme;  $\approx N^8$  actions for an implicit scheme. Thus, in terms of the amount of calculations, the explicit scheme turns out to be even more profitable than the implicit scheme. At the same time, the implicit scheme has its own positive quality — it is absolutely stable.

The question arises: is it possible to build a scheme that combines the best qualities of explicit and implicit schemes, that is:

- 1) unconditionally stable, as an implicit scheme;

2) requires the transition from layer to layer of computing costs, proportional to the number of grid nodes, as a clear scheme.

### Formulation of the purpose of the research

The effort to combine these positive properties of explicit and implicit difference schemes led to the creation of the so-called economic difference schemes. A finite-difference scheme is called economical if the number of performed operations is proportional to the number of grid nodes. Currently, a significant number of economic difference schemes for the numerical solution of multidimensional problems of mathematical physics are known, based on the splitting of spatial differential operators along the coordinate directions and the use of the scalar run method along these directions [7].

The most widespread of them were the schemes based on the splitting method. Fractional step methods developed in the late 1950s and early 1960s by Academician M.M. Yanenko and his school [8] proved to be fruitful both in solving a huge class of problems in the mechanics of continuous environments, but also became a motivating factor for the search for new economic methods numerical solution of the specified class of problems. As a result of the application of this method, the calculation at each time interval is divided into a number of separate stages and the solution of multidimensional problems is reduced to the solution of a sequence of one-dimensional problems using an efficient method of running.

One of the best difference schemes for solving two-dimensional non-stationary heat conduction problems is the scheme of alternating directions or the longitudinal-transverse scheme. The essence of this scheme is that the time step  $\Delta\tau$  is divided into two half-steps, i.e. the transition from the moment of time  $\tau_n$  to the moment of time  $\tau_{n+1}$  is carried out through the intermediate time layer  $\tau_{n+1/2} = \tau_n + \Delta\tau/2$ . At the first half-step, the second derivative along one of the coordinates (for example, along  $y$ ) is approximated explicitly (using the temperatures on the time layer  $\tau_n$ ), and the second derivative along the second coordinate is approximated implicitly (using the temperatures on the half-integer step  $\tau_{n+1/2}$ ). In the second half-step, on the contrary, the implicit approximation (using the temperatures at the step  $\tau_{n+1}$ ) is used only in the  $y$  direction, and the explicit approximation is used in the  $x$  direction (using the temperatures at the step  $\tau_{n+1/2}$ ).

### Presenting of the main material

For our problem, the scheme of the method of variable directions looks like this

Subscheme 1

$$\frac{t_{i,j}^{n+1/2} - t_{i,j}^n}{\Delta\tau/2} = a \frac{t_{i-1,j}^{n+1/2} - 2t_{i,j}^{n+1/2} + t_{i+1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + a \frac{t_{i,j-1}^n - 2t_{i,j}^n + t_{i,j+1}^n}{\Delta y^2}. \quad (4)$$

Subscheme 2

$$\frac{t_{i,j}^{n+1} - t_{i,j}^{n+1/2}}{\Delta\tau/2} = a \frac{t_{i-1,j}^{n+1/2} - 2t_{i,j}^{n+1/2} + t_{i+1,j}^{n+1/2}}{\Delta x^2} + a \frac{t_{i,j-1}^{n+1} - 2t_{i,j}^{n+1} + t_{i,j+1}^{n+1}}{\Delta y^2}. \quad (5)$$

$$i = 1, \dots, I-1; j = 1, \dots, J-1; n = 0, \dots, N-1.$$

Differential formulation of boundary conditions

$$t_{i,0}^n = \varphi_1(x_i, \tau_n); i = 0, \dots, I; j = 0; n = 0, \dots, N;$$

$$t_{i,J}^n = \varphi_2(x_i, \tau_n); i = 0, \dots, I; j = J; n = 0, \dots, N;$$

$$t_{0,j}^n = \varphi_3(y_j, \tau_n); i = 0; j = 0, \dots, J; n = 0, \dots, N;$$

$$t_{I,j}^n = \varphi_4(y_j, \tau_n); i = I; j = 0, \dots, J; n = 0, \dots, N.$$

Initial condition

$$t_{i,j}^0 = \psi(x_i, \tau_n); i = 0, \dots, I; j = 0, \dots, J; n = 0.$$

The difference scheme (4) — (5) is definitely stable, it converges at a rate of  $O(\Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta\tau^2)$  [5—7].

In subscheme 1, at the first fractional step  $\Delta\tau/2$  the approximation in  $x$  is taken implicitly, and in  $y$  explicitly.

Let's write (4) in the form

$$A_i t_{i-1,j}^{n+1/2} - C_i t_{i,j}^{n+1/2} + B_i t_{i+1,j}^{n+1/2} = -F_i, \quad (6)$$

$$i = 1, \dots, I-1; j = 0, \dots, J; n = 0, \dots, N-1.$$

$$\text{де } A_i = \frac{a\Delta\tau}{2\Delta x^2}; B_i = \frac{a\Delta\tau}{2\Delta x^2}; C_i = 1 + \frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2}; A_j = \frac{a\Delta\tau}{2\Delta y^2}; B_j = \frac{a\Delta\tau}{2\Delta y^2}; C_j = 1 + \frac{a\Delta\tau}{\Delta y^2};$$

$$F_i = A_j t_{i,j-1}^n - C_j t_{i,j}^n + B_j t_{i,j+1}^n.$$

The SLE has a tridiagonal form and can be solved using the method of running along the  $x$ -axis. With the help of runs in the amount equal to the number  $J-1$ , in the direction of the variable  $x$ , we obtain the distribution of the grid function  $t_{i,j}^{n+1/2}$ ,  $i = 1, \dots, I-1; j = 1, \dots, J-1$  on the first-time half-interval  $\tau_{n+1/2} = \tau_n + \Delta\tau/2$ .

In subscheme 2, the approximation along  $y$  is taken implicitly at the time interval  $\tau_{n+1} = (n+1)\Delta\tau$ , and along  $x$  — explicitly at the moment of time  $\tau_{n+1/2} = \tau_n + \Delta\tau/2$ .

Let's write (5) in the form

$$A_j t_{i,j-1}^{n+1} - C_j t_{i,j}^{n+1} + B_j t_{i,j+1}^{n+1} = -F_j, \quad (7)$$

$$j = 1, \dots, J-1; i = 0, \dots, I; n = 0, \dots, N-1.$$

$$\text{де } A_i = \frac{a\Delta\tau}{2\Delta x^2}; B_i = \frac{a\Delta\tau}{2\Delta x^2}; C_i = 1 + \frac{a\Delta\tau}{\Delta x^2}; A_j = \frac{a\Delta\tau}{2\Delta y^2}; B_j = \frac{a\Delta\tau}{2\Delta y^2}; C_j = 1 + \frac{a\Delta\tau}{\Delta y^2};$$

$$F_j = A_i t_{i-1,j}^{n+1/2} - C_i t_{i,j}^{n+1/2} + B_i t_{i+1,j}^{n+1/2}.$$

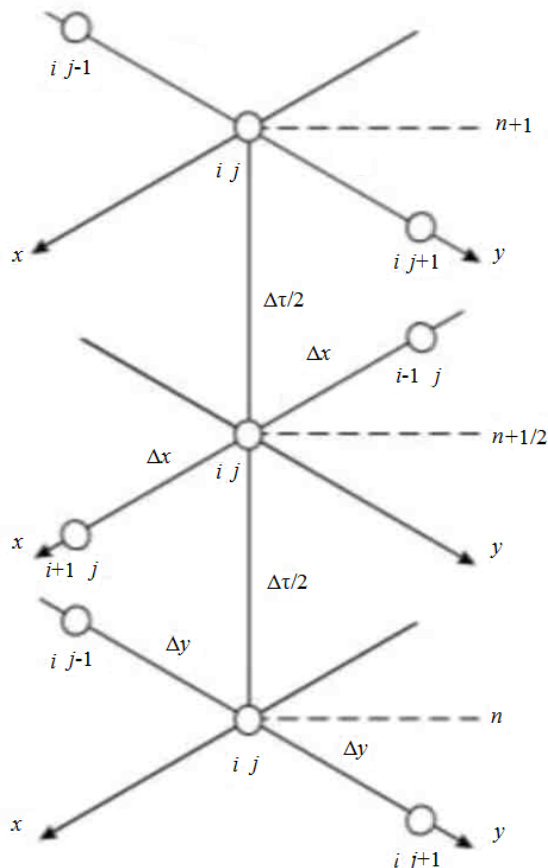


Fig. 2. Template of the scheme of variable directions

The SLE has a tridiagonal form and can be solved using the method of running along the  $y$  axis. With the help of runs in the amount equal to the number  $I-1$ , in the direction of the variable  $y$ , we obtain the distribution of the grid function  $t_{i,j}^{n+1}$ ,  $i = 1, \dots, I-1; j = 1, \dots, J-1$  on the second time half-slice  $\tau_{n+1} = \tau_{n+1/2} + \Delta\tau/2$ .

The template of the scheme of variable directions is presented in fig. 2.

Calculations of the melting of a weighted combined aluminum-containing deoxidizer of a cylindrical shape in a protective shell in the melt and under asymmetric boundary conditions at the slag-metal interface according to the classical finite-difference scheme are given in [3]. The assumptions used in the calculations, the conditions for introducing the deoxidizer and the types of deoxidizer depending on the aluminum content are also described there. In this work, with the same initial data, computational experiments were conducted using the economic difference scheme of variable directions. This made it possible to reduce the time of calculations by an average of 10 percent, which is quite a good result.

### Conclusions

Taking into account the peculiarities of the implementation of the economic difference scheme of variable directions when solving the problem of melting a weighted combined aluminum-containing deoxidizer of a cylindrical shape in a protective shell in the melt and under asymmetric boundary conditions at the slag-metal interphase boundary, it is possible to significantly reduce the computational costs for solving the difference analogues of ordinary differential equations and equations in partial derivatives. The results of computer experiments allow us to establish rational modes of introduction of such a deoxidizer, which provide the most favorable conditions for their melting in a steel ladle in the process of releasing metal from an oxygen converter.

### References

- [1] Babenko M.V., & Pavlyuchenkov I.A. (2008). Raskisleniye metalla s ispol'zovaniyem alyuminiyevykh sterzhney s zashchitnym pokrytiyem pri vnepechnoy dovodke stali [Metal deoxidation using aluminum rods with a protective coating during out-of-furnace finishing of steel]. *A.Yasaui atindigy Khalykaralyk kazakurik universitetinin khabarshisy*, 1, 61-65.
- [2] Nikitenko N.I., Snezhkin YU.F., Sorokovaya N.N., & Kol'chik YU.N. (2014). *Molekulyarno-radiatsionnaya teoriya i metody rascheta teplo- i massoobmena [Molecular Radiation Theory and Methods for Calculating Heat and Mass Transfer]*. Kiev: Naukova dumka.
- [3] Voloshin R.V., & Babenko M.V. (2015). Matematicheskaya model' plavleniya utyazhelennogo kombinirovannogo alyumosoderzhashchego raskislitelya tsilindricheskoy formy v zashchitnoy obolochke [Mathematical Model of Melting of a Weighted Combined Aluminum-Containing Cylindrical Deoxidizer in a Protective Shell]. *Matematichne modelyuvannya*, 1(32), 33-35.
- [4] Voloshin R.V., Babenko M.V., Zhul'kovskiy O.A., Zhul'kovskaya I.I., & Degtyarenko YA.O. (2016). Algoritm rascheta plavleniya utyazhelennogo kombinirovannogo alyumosoderzhashchego raskislitelya tsilindricheskoy formy v zashchitnoy obolochke [Algorithm for Calculating the Melting of a Weighted Combined Aluminum-Containing Cylindrical Deoxidizer in a Protective Shell]. *Matematichne modelyuvannya*, 2(35), 39-42.
- [5] Voloshyn R.V., Babenko M.V., & Kryvosheyev H.A. (2018). Obgruntuvannya vyboru chysel'noho metodu, dlya vyrishennya zavdannya plavleniya kombinovanoho alyumovmiskoho rozkyslyuvacha tsylindrychnoy formy, z obvazhnyuvachem, v zakhysniy obolontsi [Justification of the choice of a numerical method for solving the problem of melting a weighted combined aluminum-containing cylindrical deoxidizer in a protective shell]. *Matematychny modelyuvannya*, 1(38), 35-40.
- [6] Ogurtsov A.P., Mamayev L.M., & Karimov I.K. (1997). *Matematicheskiye metody i modeli v raschetakh na EVM [Mathematical methods and models in computer calculations]*. Kiev: ISMO.
- [7] Pirumov U.G. (2015). *Chislennyye metody [Numerical methods]*. Moskva: Izdatel'stvo Yurayt.
- [8] Yanenko N.N. (1967). *Metod drobnyykh shagov resheniya zadach matematicheskoy fiziki [Method of fractional steps for solving problems of mathematical physics]*. Novosibirsk: «Nauka».

### ОСОБЛИВОСТІ РЕАЛІЗАЦІЇ ЕКОНОМІЧНОЇ РІЗНИЦЕВОЇ СХЕМИ ЗМІННИХ НАПРЯМКІВ ПРИ ВИРІШЕННІ ЗАДАЧІ ПЛАВЛЕННЯ ОБВАЖЕНОГО КОМБІНОВАНОГО АЛЮМОВМІСТКОГО РОЗКИСЛЮВАЧА В ЗАХИСНІЙ ОБОЛОНЦІ

**Волошин Р.В., Бабенко М.В., Лимар Н.М., Громовой А.А.**

Метою даної статті є дослідження ефективності використання економічної різницевої схеми змінних напрямків при вирішенні задачі плавлення обваженого комбінованого алюмовмісткого розкислювача циліндричної форми в захисній оболонці в розплаві і за несиметричних граничних умов на міжфазній межі шлак-метал. Така задача відноситься до задач теплопровід-

ності з рухомими межами розподілу фаз. При вирішенні подібних задач математичної фізики визначальними є обчислювальні витрати на рішення різницевих аналогів диференціальних рівнянь в частинних похідних, які різко зростають зі збільшенням вузлів розрахункової сітки, особливо у дво- і тривимірних просторах. У випадку явної схеми це пов'язане з її умовною стійкістю. У випадку неявної схеми зростання об'єму обчислень пов'язане з тим, що одержувана система рівнянь містить по 5 невідомих в кожному рівнянні, але неявна схема має свою позитивну якість — вона абсолютно стійка.

Прагнення з'єднати позитивні властивості явних і неявних різницевих схем привело до створення так званих економічних різницевих схем.

Однієї із кращих різницевих схем для рішення двовірних нестационарних задач теплопровідності є схема змінних напрямків або подовжньо-поперечна схема. Суть цієї схеми полягає в тому, що крок за часом ділиться на два півкроки. На першому півкроку друга похідна по одній з координат (наприклад, по  $y$ ) апроксимується явно, а друга похідна по другій координаті — неявно. На другому півкроку, навпаки, неявна апроксимація використовується тільки по напрямку  $y$ , а по напрямку  $x$  застосовується явна апроксимація.

Використання економічної різницевої схеми змінних напрямків при вирішенні задачі плавлення обваженого комбінованого алюмомісткого розкислювача циліндричної форми в захисній оболонці дозволяє зменшити час виконання розрахунків в середньому на десять відсотків.

### Список використаної літератури

1. Бабенко М.В., Павлюченков И.А. Раскисление металла с использованием алюминиевых стержней с защитным покрытием при внепечной доводке стали // А. Ясауи атындыгы Халькааралык казактурік университетінін хабаршысы. 2008. № 1. С. 61–65.
2. Молекулярно-радиационная теория и методы расчета тепло- и массообмена / Никитенко Н.И., Снежкин Ю.Ф., Сороковая Н.Н., Кольчик Ю.Н. К.: Наукова думка, 2014, 743 с.
3. Волошин Р.В., Бабенко М.В. Математическая модель плавления утяжеленного комбинированного алюмосодержащего раскислителя цилиндрической формы в защитной оболочке // Математичне моделювання. 2015. №1(32). С. 33–35.
4. Волошин Р.В., Бабенко М.В., Жульковский О.А., Жульковская И.И., Дегтяренко Я.О. Алгоритм расчета плавления утяжеленного комбинированного алюмосодержащего раскислителя цилиндрической формы в защитной оболочке // Математичне моделювання. 2016. №2(35), С. 39–42.
5. Волошин Р.В., Бабенко М.В., Кривошеев Г.А. Обгрунтування вибору чисельного методу, для вирішення завдання плавлення комбінованого алюмомісткого розкислювача циліндричної форми, з обважнювачем, в захисній оболонці // Математичне моделювання. 2018. № 1(38). С. 35–40.
6. Огурцов А.П., Мамаев Л.М., Каримов И.К. Математические методы и модели в расчетах на ЭВМ. К.: ИСМО, 1997. 192 с.
7. Пирумов У.Г. Численные методы. Москва: Издательство Юрайт, 2015. 421 с.
8. Яненко Н.Н. Метод дробных шагов решения задач математической физики. Новосибирск: «Наука», 1967. 197 с.