МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ПРИРОДНИЧИХ НАУКАХ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

УДК 536.2
Ю.М. Пишнограєв, к.ф.-м.н., доцент
Г.І. Штанько, старший викладач
Запорізька державна інженерна академія, м. Запоріжжя

МОДЕЛЮВАННЯ КОНВЕКТИВНОЇ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ ДВОШАРОВОГО СЕРЕДОВИЩА ПРИ НЕОДНОРІДНИХ ГРАНИЧНИХ УМОВАХ

У роботі розглядаються особливості застосування методу скінчених інтегральних перетворень в задачі конвективної теплопровідності двошарового середовища для випадку, коли на зовнішніх межах задано неоднорідні граничні умови першого роду довільного виду. Показується необхідність подання шуканої температурної функції у вигляді суми двох доданків: нестаціонарного і квазістаціонарного. Наводиться алгоритм вирішення задачі щодо квазістаціонарної складової, кінцевий вигляд якої записаний як лінійна комбінація лінійної і експоненціальної функцій. Робиться висновок, що врахування квазістаціонарного доданка дозволяє поліпшити збіжність функціонального ряду, який є формальним рішенням вихідної задачі при неоднорідних граничних умовах.
***Ключові слова**: теплопровідність, конвекція, двошарове середовище, інтегральне перетворення, квазістаціонарна задача.*

In this paper, two-layered medium is considered with inhomogeneous boundary conditions of the first kind on external boundaries. The purpose of this work is to show the details of the application of the method of finite integral transformations in the problem of convective heat conduction. It is shown that it is necessary to represent the target temperature function as a sum of two functions: non-stationary and quasi-stationary. An algorithm for solving the problem with respect to a quasi-stationary component is given, the final form of which is written as a linear combination of a linear and exponential functions. It is concluded that taking into account the quasi-stationary term helps to improve the convergence of the functional series, representing a formal solution of the initial problem for inhomogeneous boundary conditions.
***Keywords**: heat conduction, convection, two-layered medium, integral transformation, quasistationary problem.*

Постановка проблеми

В інженерній практиці велике значення має знання температурних полів, що виникають в різноманітних елементах конструкцій. Як правило, математична модель задач про розповсюдження тепла складається з рівнянь в частинних похідних, граничних та початкових умов. Найчастіше для розв'язання таких задач використовуються наближені чисельні методи. Завдяки розвитку обчислювальної техніки, чисельні методи досить популярні, але мають ряд недоліків.

До них відносяться проблеми накопичення помилок, похибки самих методів і, як результат, неможливість отримання достовірних результатів, особливо поблизу особливих точок середовищ, що розглядаються. Все це призводить до необхідності проведення аналітичних досліджень. Розв'язки, отримані аналітичними методами, дозволяють провести дослідження поведінки температурної функції в різних точках об'єктів, що розглядаються, при великих розкидах геометричних і теплофізичних характеристик. Зважаючи на це вивчення особливостей використання аналітичних методів є важливою і актуальною задачею при проведенні наукових досліджень.

Аналіз останніх джерел досліджень і публікацій

Одним з найбільш відомих методів розв'язку задач теплопровідності є метод скінчених інтегральних перетворень [1]. Однак, його використання в задачах для багатошарових середовищ [2] пов'язано з певними труднощами. Одна з проблем полягає в побудові повної системи ортогональних функцій, які використовуються у якості ядер інтегральних перетворень [3]. Інша проблема виникає в задачах з неоднорідними граничними умовами. В цьому випадку після проведення інтегрального перетворення формальний розв'язок записується у вигляді функціональних рядів з нерівномірною збіжністю. Це призводить до труднощів при чисельній реалізації розв'язку, і, в підсумку, до отримання недостовірних результатів поблизу границь. Дослідження, пов'язані з поліпшенням збіжності рядів, що входять до розв'язку, викладені в даній роботі.

Постановка задачі

Об'єктом дослідження є двошарове середовище (рис.1). Перший шар займає область $(-l_1;0)$, другий — $(0;l_2)$. Коефіціент температуропровідності a, теплопровідності λ і швидкість руху середовища w дорівнюють a_1, λ_1, w_1 на першому шарі і a_2, λ_2, w_2 на другому шарі відповідно. Граничні умови при $x=-l_1$ описуються функцією від часу $f_1(t)$, при $x=l_2$ функцією $f_2(t)$. На спільній границі задані умови ідеального теплового контакту. В початковий момент часу температура розподілена по закону $T_0(x)$. Потрібно визначити температурну функцію $T(x,t)$, що залежить від просторової змінної та часу.

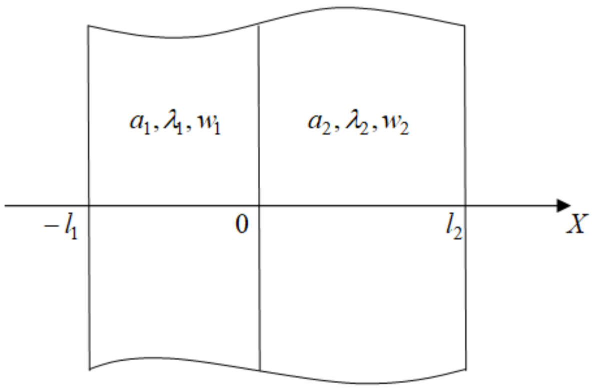

Рис. 1. Двошарова область

Математична модель задачі складається з рівняння в частинних похідних

$$T_t(x,t)=a\cdot T_{xx}(x,t)+wT_x(x,t), \tag{1}$$

граничних умов

$$\begin{cases} T(-l_1,t)=f_1(t), \\ T(l_2,t)=f_2(t), \\ T(-0,t)=T(+0,t), \\ \lambda_1 T_x(-0,t)=\lambda_2 T_x(+0,t), \end{cases} \tag{2}$$

а також початкової умови

$$T(x,0)=T_0(x). \tag{3}$$

Основна частина досліджень

З огляду на те, що на зовнішніх границях задані неоднорідні граничні умови, необхідно зробити заміну [4]

$$T(x,t) = S(x) + N(x,t). \tag{4}$$

В результаті задача (1)—(3) розбивається на дві підзадачі: квазістаціонарную відносно функції $S(x)$, і нестаціонарну відносно функції $N(x,t)$. В даній роботі головний інтерес представляє задача відносно функції $S(x)$. Вона складається з диференціального рівняння

$$a \cdot S''(x) + wS'(x) = 0 \tag{5}$$

і граничних умов

$$\begin{cases} S(-l_1) = f_1(t), \\ S(l_2) = f_2(t), \\ S(-0) = S(+0), \\ \lambda_1 S'(-0) = \lambda_2 S'(+0). \end{cases} \tag{6}$$

Розв'язок рівняння (5) має вид

$$\begin{aligned} S_1 &= A_1 + B_1 e^{-\frac{w_1}{a_1}x}, \text{ при } x \in [-l_1;0], \\ S_2 &= A_2 + B_2 e^{-\frac{w_2}{a_2}x}, \text{ при } x \in [0;l_2]. \end{aligned} \tag{7}$$

Використовуючи граничні умови (6), приходимо до системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно постійних A_1, B_1, A_2, B_2

$$\begin{cases} A_1 + B_1 e^{\frac{w_1}{a_1}l_1} = f_1(t), \\ A_2 + B_2 e^{-\frac{w_2}{a_2}l_2} = f_2(t), \\ A_1 + B_1 = A_2 + B_2, \\ \dfrac{\lambda_1 w_1}{a_1} B_1 = \dfrac{\lambda_2 w_2}{a_2} B_2. \end{cases} \tag{8}$$

З системи (8) визначаємо

$$A_1 = \frac{a_1\lambda_2 w_2 (f_1(t) - f_2(t) e^{\frac{w_1}{a_1}l_1}) - a_2\lambda_1 w_1 f_1(t)(1 - e^{-\frac{w_2}{a_2}l_2})}{a_1\lambda_2 w_2 (1 - e^{\frac{w_1}{a_1}l_1}) - a_2\lambda_1 w_1 (1 - e^{-\frac{w_2}{a_2}l_2})}, \tag{9}$$

$$B_1 = \frac{a_1\lambda_2 w_2 (f_2(t) - f_1(t))}{a_1\lambda_2 w_2 (1 - e^{\frac{w_1}{a_1}l_1}) - a_2\lambda_1 w_1 (1 - e^{-\frac{w_2}{a_2}l_2})}, \tag{10}$$

$$A_2 = \frac{a_2\lambda_1 w_1 (f_1(t) e^{-\frac{w_2}{a_2}l_2} - f_2(t)) + a_1\lambda_2 w_2 f_2(t)(1 - e^{\frac{w_1}{a_1}l_1})}{a_1\lambda_2 w_2 (1 - e^{\frac{w_1}{a_1}l_1}) - a_2\lambda_1 w_1 (1 - e^{-\frac{w_2}{a_2}l_2})}, \tag{11}$$

$$B_2 = \frac{a_2\lambda_1 w_1 (f_2(t) - f_1(t))}{a_1\lambda_2 w_2 (1 - e^{\frac{w_1}{a_1}l_1}) - a_2\lambda_1 w_1 (1 - e^{-\frac{w_2}{a_2}l_2})}. \tag{12}$$

Таким чином, функція $S(x)$, яка описує квазістаціонарну складову розв'язку, визначається виразами (7), (9) – (12).

Перейдемо до задачі відносно функції $N(x,t)$. Вона складається з рівняння в частинних похідних

$$N_t(x,t) = a \cdot N_{xx}(x,t) + wN_x(x,t), \tag{13}$$

граничних умов

$$\begin{cases} N(-l_1,t) = 0, \\ N(l_2,t) = 0, \\ N(-0,t) = N(+0,t), \\ \lambda_1 N_x(-0,t) = \lambda_2 N_x(+0,t), \end{cases} \tag{14}$$

а також початкової умови

$$N(x,0) = T_0(x) - S(x) . \tag{15}$$

Відмітимо, що функція $N(x,t)$ повинна задовольняти на зовнішніх границях однорідним граничним умовам. Це означає, що для розв'язання задачі (13) – (15) можна ефективно використовувати метод скінчених інтегральних перетворень. Цей метод грунтується на побудові системи власних функцій, ортогональних з вагою $\rho(x)$

$$\int_{-l_1}^{l_2} \rho(x)\varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = \begin{cases} 0, & n \neq m, \\ \|\varphi_n\|^2, & n = m, \end{cases} \tag{16}$$

де $\|\varphi_n\|^2$ — квадрат норми власних функцій [1].

Процес знаходження власних функцій описаний в роботах [5,6]. Ці функції використовуються для проведення над задачею (13)—(15) скінченого інтегрального перетворення за формулою

$$\overline{N}_n(t) = \int_{-l_1}^{l_2} \rho(x)\varphi_n(x)N(x,t)dx . \tag{17}$$

В результаті задача зводиться до звичайного диференціального рівняння

$$\overline{N}_n'(t) + \beta_n^2 \overline{N}_n(t) = 0 \tag{18}$$

з початковою умовою

$$\overline{N}_n(0) = \int_{-l_1}^{l_2} (T_0(x) - S(x))\rho(x)\varphi_n(x)dx . \tag{19}$$

Значення β_n^2, що входять в (17), називаються власними значеннями і визначаються заздалегідь при знаходженні власних функцій. Розв'язком рівняння (18) з початковою умовою (19) є функція

$$\overline{N}_n(t) = \overline{N}_n(0)e^{-\beta_n^2 t} . \tag{20}$$

Використовуючи формулу обернення

$$N(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\overline{N}_n(t)}{\|\varphi_n\|^2}, \tag{21}$$

можна записати вираз для функції $N(x,t)$:

$$N(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\overline{N}_n(0)e^{-\beta_n^2 t}}{\|\varphi_n\|^2} . \tag{22}$$

Тоді кінцевий розвязок задачі (1)—(3), з урахуванням виразу (4), буде мати вигляд

$$T(x,t) = Ax + Be^{-\frac{w}{a}x} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x)\overline{N}_n(0)e^{-\beta_n^2 t}}{\|\varphi_n\|^2}, \tag{23}$$

де сталі A и B на кожному з шарів визначаються співвідношеннями (9)—(12).

Висновки

Слід зазначити, що для розв'язання задачі (1)—(3) можливо безпосередньо застосувати інтегральне перетворення і отримати розв'язок у вигляді функціонального ряду. Однак чисельна реалізація такого рішення має певні складнощі, тому що ряд, що входить у розв'язок, є нерівномірно збіжним і на зовнішніх границях перетворюється на нуль. Подання невідомої температурної функції у вигляді суми квазістаціонарного та нестаціонарного доданків дозволяє уникнути цих проблем. Аналіз виразу (23) показує, що завдяки наявності експоненти ряд швидко збігається. А при достатньо великих значеннях часової змінної t, сума ряду прагне до нуля. При цьому температурна функція буде описана квазістаціонарною складовою.

Список використаної літератури

1. Карташев Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности \ Э.М. Карташев. – М.: Высш. шк., 1985. – 480 с.
2. Плятт Ш.Н. Расчеты температурных полей бетонных гидросооружений / Ш.Н.Плятт. – М.Энергия, 1974.– 407 с.
3. Пышнограев Ю.Н. Задача о распространении тепла в ортотропной двуслойной пластине при нагреве точечными источниками тепла / Ю.Н. Пышнограев, // ТрудыI ВК «Технологические проблемы прочности несущих конструкций» Т.1, Ч.2, Запорожье, 1991.
4. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров / С. Фарлоу. – М.: Мир, 1985. –384 с.
5. Пышнограев Ю.Н. Построение системы собственных функций для уравнения конвективной диффузии с кусочно-постоянными коэффициентами / Ю.Н. Пышнограев, Е.Ю. Пышнограев // Збірник праць Інституту математики НАН України. – 2012. – т.9, № 1.– С. 7–12
6. Пышнограев Ю.Н. Аналитическое решение задачи конвективного теплообмена в двуслойных средах / Ю.Н. Пышнограев, А.И. Штанько, Е.Ю. Пышнограев // Вісник Запорізького національного університету. Фізико-математичні науки. № 2, 2017. С. 236–242.