УДК 519.85
А.І. Косолап, д.ф.-м.н., професор, завідувач кафедри спеціалізованих комп'ютерних систем, anivkos@ua.fm
Г.М. Кодола, викладач кафедри інформаційних систем, gkodola@gmail.com
Український державний хіміко-технологічний університет, м. Дніпро

ЕФЕКТИВНИЙ МЕТОД ОПТИМІЗАЦІЇ В ЗАДАЧАХ ЛІНІЙНОГО РОЗКРОЮ МАТЕРІАЛІВ

В статті розглянута класична задача лінійного розкрою, яка є NP-складною. Для розв'язування даного класу задач пропонується метод точної квадратичної регуляризації (EQR), який є ефективним для задач розкрою великої розмірності.
Ключові слова: *лінійний розкрій, оптимізація, метод точної квадратичної регуляризації.*

In the article the classic problem of linear cutting, which is NP-difficult, is considered. To solve this class of problems a new method of an Exact Quadratic Regularization (EQR) is proposed, which is effective for solving the problems of cutting of large dimension.
Keywords: *linear cutting, optimization, method of an Exact Quadratic Regularization.*

Постановка проблеми

Однією з основних проблем промислового підприємства є зниження витрат виробництва, що в свою чергу веде до збільшення прибутку і підвищення рентабельності виробництва. Одним з напрямків зниження витрат на виробництво є зниження неминучих втрат матеріалів, що виникають в процесі розкрою матеріалів через некратні розміри заготовок розмірам вихідного матеріалу. Зазначені матеріали надходять на підприємства у вигляді деяких цілих одиниць: листів, труб, смуг, профільного прокату, рулонів і т. і. Для того щоб використовувати ці вихідні матеріали, їх потрібно розкроїти на частини потрібних розмірів і форми. При цьому, як правило, при виготовленні мірного матеріалу у виробника з'являються додаткові відходи. Ці відходи часто не використовуються або використовуються не повноцінно. У зв'язку з цим виникає проблема їх максимального скорочення.

Важливість розкрою такого матеріалу пояснюється тим, що виготовлення мірного матеріалу вимагає від виробника додаткових витрат, які складаються з виробничих витрат на обрізання частини матеріалу до необхідного розміру. Крім того, ціни на мірні матеріали вище, ніж на матеріали змішаної або так званої «торгової» довжини. Разом з тим поставка матеріалу «торгових» довжин здійснюється організаційно простіше і швидше.

У даній роботі розглядається задача одновимірного розкрою, що має практичне застосування, наприклад, на більшості підприємств по виробництву склопакетів і на суміжних підприємствах (виробництво вікон, балконів, дверей, перегородок і т. і.). Проблема даної галузі полягає в тому, що на ринку представлена велика кількість будівельних компаній, які використовують алгоритми розкрою, в яких відсутня оптимізаційна складова, а наукові дослідження в даній області мало орієнтовані на конкретні сучасні виробничі завдання.

Існує безліч варіантів розв'язання задачі, ретельний аналіз кожного з яких дає свої шляхи і засоби для економії матеріалів, але найчастіше пропоновані рішення є або вузькоспеціалізованими, або узагальненими. Актуальним завданням є створення більш ефективних оптимізаційних алгоритмів вирішення розкрійної задачі.

Формулювання цілі дослідження

Метою даної роботи є вивчення, класифікація і огляд методів розв'язування складних задач, які виникають при виробництві з виконанням лінійного розкрою мірного матеріалу та розробка ефективних методів розв'язування даного типу задач.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Задача про раціональний розкрій була однією з проблем, сформульованих Канторовичем в 1939 році в роботі [1]. Розглядалася задача формування такого плану розкрою, який в серійному виробництві дав би мінімальні витрати матеріалу в середньому на один комплект заготовок. Постановка задачі, запропонована в [1], виглядала наступним чином:

Нехай комплект складається з n видів заготовок кожного виду в кількості b_j; a_{ij} — число заготовок виду j, одержуваних при розкрою однієї частини матеріалу i-им способом. Допускається можливість вільного вибору частин матеріалу з безлічі наявних, c_i — цінність частини, використаної в i-тому розкрою. Позначимо через x_i вживаність (в середньому на один комплект заготовок) i-го розкрою. Якщо допустити, що всі можливі окремі розкрою перераховані, то задача побудови плану розкрою полягає в знаходженні невідомих x_i, які відповідають вимогам (1.1)—(1.3):

$$\sum_{i=1}^{N} a_{ij}x_i \ge b_j, \ j=\overline{1,n}; \tag{1.1}$$

$$x_i \ge 0, \ i=\overline{1,N}; \tag{1.2}$$

$$\min \sum_{i=1}^{N} c_i x_i . \tag{1.3}$$

З розглянутої постановки, вимір, за яким передбачається оптимізувати витрати матеріалу, в постановці задачі в явному вигляді не фігурує, замість цього вводиться поняття вартості i-тої частини матеріалу. Такий підхід дозволяє легко розширити запропоноване формулювання для довільної n-мірної задачі з введенням додаткових факторів, що враховують характерні особливості окремої задачі розкрою. Задача раціонального розкрою, сформульована в такому вигляді, являє собою одну з типових задач лінійного програмування.

В [2] була запропонована інша модель, в якій можливі розкрійні шаблони описуються вектором $A^p = \left(a_1^p,...,a_i^p,...a_m^p\right)^T$, кожний елемент якого a_i^p дорівнює кількості заготівок довжини w_i, отриманих з розкрійного шаблону p. Розкрійний шаблон p придатний, якщо

$$\sum_{i=1}^{m} a_i^p w_i \le W; \tag{2.1}$$

$$a_i^p \ge 0, \text{ цілі,} \tag{2.2}$$

де W — загальна довжина матеріалу, що розкраюється; w_i — довжина i-ої заготівки, $i=\overline{1,m}$.

Визначимо p як набір усіх придатних шаблонів, а λ^p — як шукану змінну, яка дорівнює кількості вихідних заготівок, які розкроєні в відповідності з шаблоном p, для усіх $p \in P$. Тоді задача розкрою сформулюється наступним чином (2.3—2.5):

$$\min \sum_{p\in P} \lambda^p ; \tag{2.3}$$

$$\sum_{p\in P} a_i^p \lambda^p \ge b_i, \ i=\overline{1,m}; \tag{2.4}$$

$$\lambda^p \ge 0, \text{ цілі, } \forall p \in P, \tag{2.5}$$

де b_i — кількість заготовок i-го типу довжини w_i, які необхідно отримати.

Кількість стовпців-рішень в формулюванні (2.3—2.5) може виявитися досить значним навіть для задач середньої розмірності. У загальному випадку неможливо здійснити перебір всіх можливих рішень, тому в [2] запропонований метод генерації стовпців для вирішення задачі релаксації лінійного програмування.

Надалі були запропоновані й інші моделі, засновані на використанні графів, ациклічних мереж і т. і. [3]. В оглядових роботах 70-х років була виявлений стійкий взаємозв’язок між задачами упаковки та розкрою, обґрунтовано доцільність їх спільного розгляду як NP-повних задач комбінаторної оптимізації.

Питання класифікації задач раціонального розкрою і пакування, були розглянуті в 1990 році в [4]. Для класифікації довільної задачі розкрою або пакування H. Dyckhoff запропонував використовувати систему з 4 типологічних критеріїв, одним з яких виступала розмірність задачі.

Клас задач розкрою по H. Dykhoff визначається значеннями наступних чотирьох ознак:

1. Розмірність:
   - 1 — одновимірний розкрій;
   - 2 — двовимірний розкрій;
   - 3 — тривимірний розкрій;
   - N — N-мірний розкрій, де $N > 3$.
2. Форма розкрою:
   - B — розкраюються всі об’єкти на вибрані елементи;
   - V — розкраюються вибрані об’єкти на всі елементи.
3. Асортимент об’єктів, що розкраюються:
   - O — один об’єкт, що розкраюються;
   - I — ідентичні об’єкти;
   - D — різні об’єкти.
4. Асортимент елементів:
   - F — невелика кількість різних елементів;
   - M — безліч різних елементів;
   - R — групи ідентичних елементів;
   - C — неконгруентні фігури.

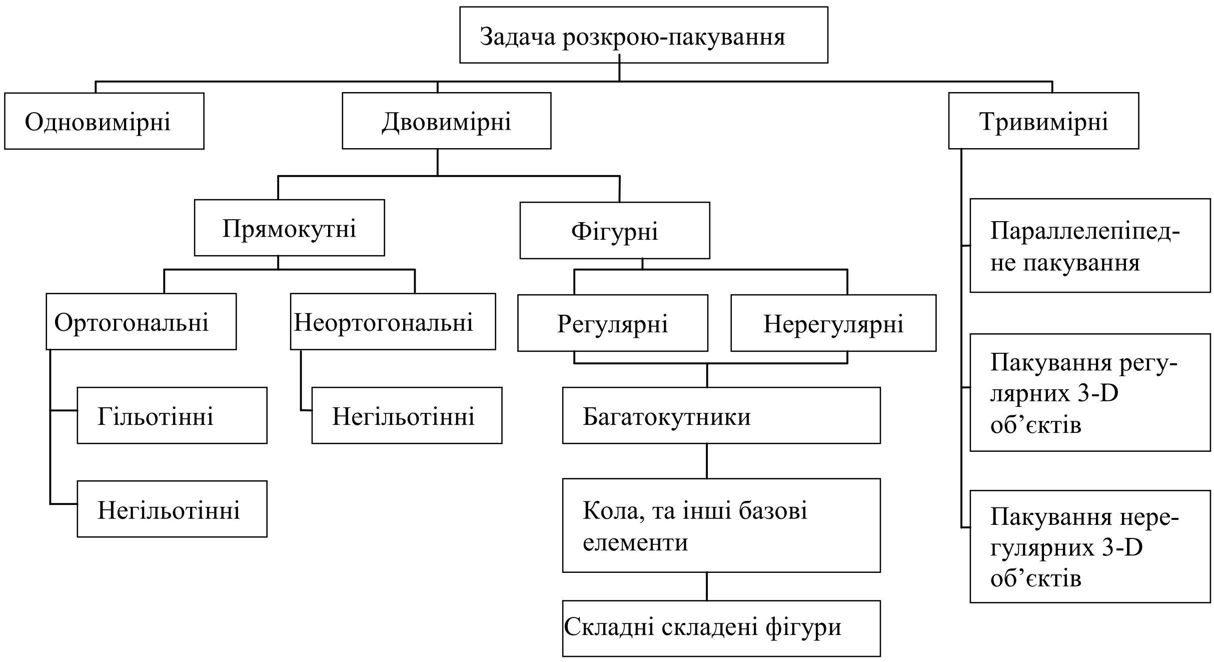

Рис. 1. Загальна класифікація задач розкрою-пакування

На рисунку 1 представлена загальна класифікація задач розкрою-пакування за H. Dykhoff.

Розглянута в [4] типологічна система зазнала значної переробки в дослідженні [5], в рамках якого були уточнені і доповнені базові характеристики задач раціонального розкрою і пакування, запропонований новий багаторівневий підхід до їх класифікації. Хоча деякі з типологічних критеріїв були уточнені, критерій розмірності задачі змін не зазнав, тому в рамках нової типології як і раніше розглядаються 1-, 2-, 3- і n-мірні задачі.

Виклад основного матеріалу

Огляд методів розв'язання задач розкрою-пакування. Для розв'язку задач розкроюпакування більшість з оптимізаційних методів використовували лінійні моделі і методи лінійного програмування (Linear Programming, LP). Основи даних методів були закладені роботами Л. В. Канторовича, В. А. Залгаллером [1] і P. Gilmore, R. Gomory [2]. Також отримали розвиток точні методи, які використовують методологію «гілок і меж», описані в роботах І. В. Романовського, С. В. Канцева [6] і S. Martello, D. Toth [7], а також їх подальші дослідження, які велися в області зменшення обсягу перебору.

Задача раціонального розкрою відноситься до класу NP-повних дискретних оптимізаційних задач комбінаторного типу. На даний час найбільш вдала схема класифікації методів розкрою запропонована J. Karelahti [8] та доповнена Ю. Скобцовим [9].

Слід розрізняти наближені і точні методи вирішення задач дискретної оптимізації. До наближених методів, в свою чергу, відносять евристики і метаевристики [9].

Розробка точних методів побудови оптимальних планів розкрою ведеться досить давно. Поширені підходи передбачають використання методу відсікання для розв'язку відповідних задач цілочислового лінійного програмування або реалізацію ефективних переборних алгоритмів на основі загальної схеми методу гілок і меж [10, 11].

Евристичні методи не гарантують отримання оптимальних рішень, але при цьому відрізняються порівняльною простотою і дозволяють при незначних витратах отримувати рішення, прийнятні для практичного використання. Евристичні методи, використовувані для розв'язання задач раціонального розкрою, умовно можна поділити на дві групи. Методи першої групи ґрунтуються на розв'язанні допоміжної задачі лінійного програмування [1]. Отриманий розв'язок розкрійної задачі не є цілочисловим і потребує відповідної корекції. У методах другої групи застосовується інший підхід, який передбачає покрокову побудову допустимого розв'язку за кінцеве число ітерацій [12].

Метаевристичні методи набули широкої популярності відносно недавно і стрімко еволюціонували від простих концепцій до складних ієрархічних моделей, які відтворюють організацію і поведінку об'єктів живої і неживої природи, в тому числі і людини. Узагальнена структура довільного метаевристичного методу передбачає наявність інтелектуальної стратегії, яка керує проблемно-орієнтованою евристикою нижнього рівня і запобігає збіжність до локальних екстремумів. Прикладами метаевристик є — імітація відпалу, пошук із заборонами, різні види еволюційних алгоритмів, метод мурашиної колонії і т. і. Ефективність метаевристичних методів у розв'язанні задач раціонального розкрою підтверджена безліччю успішних досліджень [12].

В результаті представимо таку класифікацію підходів до розв'язку задачі розкроюпакування у вигляді схеми (рис. 2).

Існують, однак, і альтернативні класифікації, наприклад в [14] запропоновано розглядати методи еволюційних обчислень як окремий клас. У свою чергу, в [15] окремою групою виділені ймовірнісні алгоритми локального пошуку оптимуму і метаевристики. По суті, подібні варіації полягають в уточненні методів розв'язування та подальшому розбитті основних груп у відповідності з новими критеріями.

В даній роботі для задач лінійного розкрою використовується метод точної квадратичної регуляризації (EQR) [13], який є ефективним для розв'язку задач розкрою великої розмірності. Метод EQR має алгоритмічну основу, тому в представленій класифікації був віднесений до алгоритмічних методів.

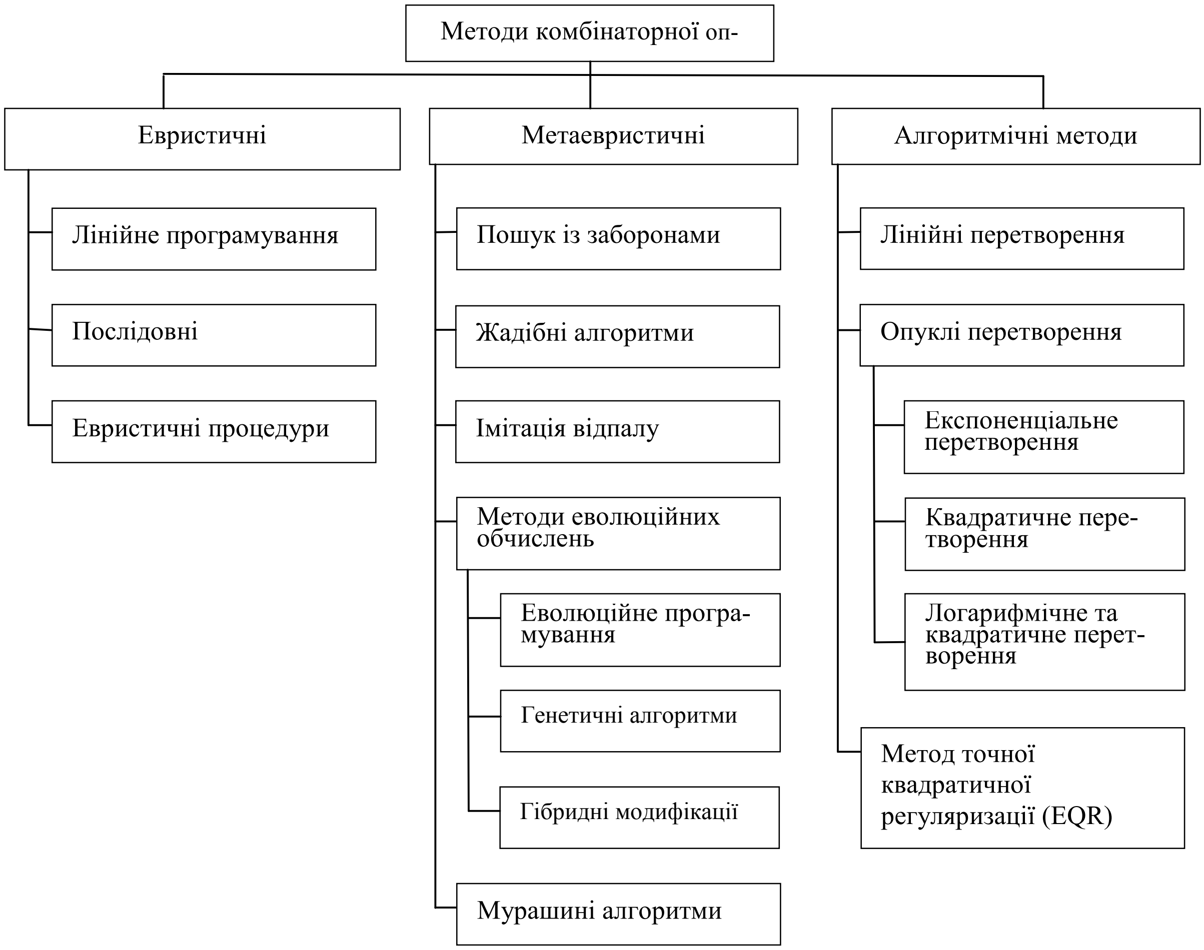

Рис. 2. Класифікація підходів до розв’язку задачі розкрою-пакування

Метод точної квадратичної регуляризації. Задачі розкрою матеріалів є оптимізаційними і їх можна представити у вигляді

$$\min\{f_0(x)\big|\, f_i(x) \le 0,\ i = 1,..,m,\ x \ge 0\}\,, \tag{3.1}$$

де всі функції $f_i(x)$ — двічі диференційовані, а змінні x часто приймають тільки цілі значення.

Методом точної квадратичної регуляризації (EQR) задача (3.1) перетворюється до вигляду

$$\max\{\|x\|^2 \big|\, f_0(x) + s + (r-1)\|x\|^2 \le d,\ f_i(x) + r\|x\|^2 \le d,\ i = 1,..,m,\ x \ge 0\}\,, \tag{3.2}$$

де $\|x\|^2 = x_1^2 + \ldots + x_{n+1}^2$.

EQR дозволяє перетворити неопуклу допустиму множину задачі (3.1) до опуклої в задачі (3.2), що значно спрощує розв’язування перетвореної задачі. Задача (3.2) має на дві змінні та на одне обмеження більше, ніж в задачі (3.1).

Якщо задача (3.1) має наступний вигляд:

$$\min\{f_0(x)\big|\, f_i(x) = 0,\ i = 1,..,m,\ x \ge 0\}\,,$$

тоді вона перетворюється до наступного виду:

$$\begin{aligned}&\max\{\|x\|^2 \big| f_0(x)+s+(r-1)\|x\|^2 \le d,\\ &f_i(x)+r\|x\|^2 \le d,\ i=1,..,m,\\ &-\sum_{i=1}^{m} f_i(x)+r\|x\|^2 \le d,\\ &x \ge 0\}.\end{aligned} \tag{3.3}$$

В задачах (3.2—3.3) необхідно вибрати два параметри s та r. Значення s повинно задовольняти умові

$$s \ge \|x^*\|^2 - f_0(x^*),$$

де x^* — розв'язок задачі (3.1).

Це значення s слід контролювати при розв'язуванні задачі, і якщо воно не задовольняє даній нерівності, то значення s необхідно збільшити. Параметр r вибираємо таким чином, що обмеження задач (3.2—3.3) були б опуклими. В задачах (3.2—3.3) необхідно знайти мінімальне значення d^*, для якого розв'язок цих задач x^* задовольняє умові $r\|x^*\|^2 = d^*$ з заданою точністю, де x^* — розв'язок задачі (3.1) при заданому значенні d^*. Таким чином, метод EQR полягає в тому, що задачі (3.2—3.3) розв'язуються при фіксованих значеннях змінної d та для кожного їхнього розв'язку перевіряється умова $r\|x\|^2 = d$. Якщо $r\|x\|^2 < d$, то значення d збільшуємо, якщо $r\|x\|^2 > d$, то зменшуємо до отримання рівності. Зміну d можна задати формулою

$$d = d + \alpha(d - r\|x\|^2),$$

де $\alpha \in (0,1]$. Таким чином, оптимальне значення d знаходимо методом дихотомії.

Для визначення мінімального значення d розв'язуємо опуклу задачу:

$$\min\{d \big| f_0(x)+s+(r-1)\|x\|^2 \le d,\ f_i(x)+r\|x\|^2 \le d,\ i=1,..,m,\ r\|x\|^2 \le d,\ x \ge 0\}. \tag{3.4}$$

Якщо для розв'язку даної задачі (x^0, d_0) виконується умова $r\|x\|^2 = d_0$, то задача (3.1) розв'язана та x^0 — її розв'язок. Таким чином, перетворена задача (3.2) може бути одноекстремальною. В іншому випадку, необхідно шукати мінімальне значення d^*. Якщо задача (3.2) багатоекстремальна, то дуга опуклої поверхні її допустимої множини, що з'єднує два локальних максимуми повинна містити точку мінімуму функції $\|x\|^2$ в якій кривизна цієї дуги буде меншою кривизни сфери, яка визначається лініями рівня цільової функції $\|x\|^2$. При зміщенні допустимої множини кривизна її поверхні не змінюється, а кривизна сфери зменшується. Це означає, що існує таке зміщення допустимої множини, при якому її поверхня не буде містити вказаних точок мінімуму. А така задача є одноекстремальною.

В задачі (3.1) виконаємо зміщення простору:

$$\min\{f_0(x-h) \big| f_i(x-h) \le 0,\ i=1,..,m,\ x \ge h\}. \tag{3.5}$$

Таке перетворення зводить задачу (3.2) до вигляду

$$\max\{\|x\|^2 \big| f_0(x-h)+s+(r-1)\|x\|^2 \le d,\ f_i(x-h)+r\|x\|^2 \le d,\ i=1,..,m,\ x \ge h\}. \tag{3.6}$$

Можна аналогічне зміщення допустимої множини виконати для задачі (3.2) при фіксованому значенні d, тоді перетворена задача буде мати вигляд:

$$\max\{\|x\|^2 \big| -\|x-h\|^2 + s_1 + 2\|x\|^2 \le d_1,\ x \in S\}, \tag{3.7}$$

де S — опукла допустима множина задачі (3.6).

Якщо x^* — розв'язок задачі (3.6), то для перевірки його на оптимальність будемо розв'язувати задачу (3.7), яка перетворюється до опуклої задачі. Це пов'язано с тим, що цільова функція $\|x\|^2$ на опуклій поверхні допустимої множини задачі (3.7) породжує такі ж самі лінії рівня, що й цільова функція e^Tx, де $e = (1,\ldots,1)$. Тоді задача (3.7) перетворюється до наступної

$$\min\{e^T x \Big|,\ x \in S_0 \cap S\}, \tag{3.8}$$

де

$$S_0 = \{x \mid -\| x-h \|^2 + s_1 + 2\| x \|^2 = d_1\}.$$

Нехай x^1 — розв'язок задачі (3.8). Якщо $3\|x^1\|^2 \le d$, то задача (3.7) розв'язана. Інакше буде знайдена точка x^1 в якій $3\|x^1\|^2 > d$, що дозволяє зменшити значення d методом дихотомії при розв'язуванні задачі (3.2). Таким чином, отримуємо монотонно спадаючу послідовність d, яка обмежена знизу. Коли вона досягне мінімального значення d^*, розв'язок задачі (3.8) буде співпадати з розв'язком задачі (3.1).

Алгоритм розв'язування задачі (3.1).

Крок 1. Використовуємо точну квадратичну регуляризацію для перетворення задачі (3.1) до задачі (3.2).

Крок 2. Розв'язуємо опуклу задачу (3.4) прямо-двоїстим методом внутрішньої точки та перевіряємо умову $r\| x \|^2 = d$, якщо вона виконується, то задача (3.1) розв'язана.

Крок 3. Методом дихотомії знаходимо мінімальне значення d для якого виконується умова $r\| x \|^2 = d$ (для кожного значення d розв'язуємо задачу (3.2)).

Крок 4. Для перевірки оптимальності знайденого розв'язку x^* розв'язуємо задачу (3.8). Якщо для її розв'язку x виконується умова $r\| x \|^2 = d$, то x^* — розв'язок задачі (3.1). Інакше буде знайдено точка x^1 в якій $3\|x^1\|^2 > d$, тоді переходимо до кроку 3.

Кроки алгоритму повторюємо для задачі (3.8) зі зміщенням простору до тих пір, доти розв'язок задачі (3.8) не буде змінюватися.

Розглянутий алгоритм породжує монотонно спадаючу послідовність значень $d \ge d_0$, яка буде збігатися до мінімального значення d^*.

Розв'язок задачі розкрою. Математична модель задачі лінійного розкрою з врахуванням використання залишків від попереднього розкрою буде наступна: маються вихідні заготовки заданого розміру L, та залишки від попереднього розкрою $l_1, l_2, \ldots, l_k$, які необхідно розкроїти на m заготовок заданої довжини $q_1, q_2, \ldots q_m$, при чому $\min_i l_i \ge \min_j q_j, i = 1,\ldots k$, $j = 1,\ldots m$. Відома потреба $b_1, b_2, \ldots b_m$ в заготовках відповідної довжини. Для математичної постановки задачі необхідно визначити технологічну матрицю варіантів розкрою («карта розкрою») вихідних заготовок, враховуючи залишки, на заготовки заданої довжини. Дана матриця породжує матрицю A, де елемент a_{ij} означає кількість заготовок j-го виду, при i-тої технології розкрою. Пов'язуємо з кожною технологією позитивну цілу змінну x_i, яка показує скільки раз i-та технологія розкрою використовувалась. Для кожної технології розкрою визначим вектор залишків c. Тоді задача оптимального розкрою полягає в наступному:

Знайти

$$\min\{\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \mid \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \ge b_j,\ \forall j = 1,\ldots,m,\ x_i \ge 0,\ i = 1,\ldots,n, \text{ цілі}\}, \tag{4.1}$$

що дозволяє мінімізувати залишки розкрою.

Для задачі розкрою з використанням залишків (4.1) застосуємо алгоритм методу EQR.

Спочатку перетворимо дискретну задачу (4.1) до неперервної

$$\min\{\sum_{i=1}^{n} c_i x_i \mid \sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \ge b_j,\ \forall j = 1,\ldots,m,\ x_i \ge 0,\ i = 1,\ldots,n, \sum_{i=1}^{n}(1-\cos(2\pi x_i)) \le 0\}, \tag{4.2}$$

де доданому обмеженню задовольняють тільки цілі значення x_i.

Використаємо точну квадратичну регуляризацією для перетворення задачі (4.2) до вигляду [13]:

$$\max\{\|z\|^2 \mid \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + s + (r-1)\|z\|^2 \le d,$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} x_i \ge b_j, \forall j = 1,...,m, \tag{4.3}$$
$$x_i \ge 0\ , \quad \sum_{i=1}^{n} (1-\cos(2\pi x_i)) + r\|z\|^2 \le d\},$$

де $z = (x, x_{n+1})$.

Для того, щоб допустима множина задачі (4.3) була опуклою достатньо визначити $r \ge 40$. Параметр s визначаємо з нерівності

$$s \ge \left\|x^*\right\|^2 - \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^*\ ,$$

де x^* — розв'язок задачі (4.1).

Використовуючи перетворення (3.5) в задачі (4.3) виконаємо зміщення простору, тоді отримаємо наступну задачу:

$$\max\{\|z\|^2 \mid \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + s + (r-1)\|z\|^2 \le d,$$
$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}(x_i - h) \ge b_j, \forall j = 1,...,m, \tag{4.4}$$
$$x_i \ge h\ , \quad \sum_{i=1}^{n} (1-\cos(2\pi(x_i - h)) + r\|z\|^2 \le d\},$$

Розв'язок задачі (4.4) виконується за допомогою описаного вище алгоритму.

Для побудови технологічної матриці A варіантів розкрою вихідних заготовок, враховуючи залишки, на заготовки заданої довжини використаємо алгоритм розглянутий в [16].

Розглянемо приклади розв'язку задачі лінійного розкрою, яка зводиться до розв'язку задачі (4.4).

Приклад 1. Маємо вихідну заготівлю довжиною 5600 мм. Необхідно виконати замовлення: потрібно розкроїти вихідну заготівлю на деталі довжиною 1380 мм в кількості 22 штуки, 1520 мм в кількості 25 штук, 1560 мм в кількості 12 штук, 1710 мм в кількості 14 штук та 1820 мм в кількості 18 штук з мінімальною кількістю відходів.

Для формування технологічної матриця варіантів розкрою, сформуємо вектор довжин деталей за принципом $q_1 \ge q_2 \ge ... \ge q_m$, тобто (1380, 1520, 1560, 1710, 1820). За алгоритмом в [16] технологічна матриця варіантів розкрою має 33 варіанти розкрою, тобто $n = 33$. Розглянемо, наприклад, технологію розкрою [0,1,0,0,2], це означає, що вихідну заготовку довжиною 5600 мм можна розкроїти на одну заготовку довжиною 1520 мм, та дві заготовки довжиною 1820 мм. Застосовуючи перетворення (4.4) методом EQR, для знайдених параметрів $s = 10$, $r = 65$, $d = 1041950$ був отриманий наступний розв'язок задачі: для розкрою використовується 31 заготовка вихідного матеріалу, загальна кількість відходів становить 16020 мм, та будуть застосовані наступні варіанти розкрою, які зведені до таблиці 1.

Розглянемо приклад розв'язку задачі лінійного розкрою з використанням залишків.

Приклад 2. Маємо вихідну заготівлю довжиною 9 м, та залишки від попередніх розкроїв довжиною 5 м та 3 м. Необхідно виконати замовлення: потрібно розкроїти вихідну заготівлю на деталі довжиною 2 м в кількості 101 штуки, 3 м в кількості 103 штук, 4 м в кількості 99 штук з мінімальною кількістю відходів.

Таблиця 1. Розв’язок задачі

Технологія	Залишки за технологією, мм	Кількість раз використовується
[0,0,1,1,1]	510	4
[0,1,0,0,2]	440	2
[0,1,0,1,1]	550	1
[0,1,0,2,0]	660	2
[0,1,1,0,1]	700	3
[0,1,1,1,0]	810	5
[0,2,0,0,1]	740	6
[3,0,0,0,0]	80	8

Технологічна матриця варіантів розкрою має 12 варіантів розкрою, тобто $n = 12$. З кожною технологією розкрою пов’яжемо позитивну цілу змінну x_i, $i = \overline{1,n}$. Застосовуючи метод EQR для знайдених параметрів $s = 11000$, $r = 40$, $d = 440000$ був отриманий наступний розв’язок задачі: для виконання замовлення використовується 99 заготовок довжиною 9 метрів, які розкраються за технологією (2 м, 3 м, 4 м) з залишком 0 м; 2 заготовки довжиною 5 м, які розкроюються за технологією (2 м, 3 м) з залишком 0 м; та 2 заготовки довжиною 3 м, які розкроюються за технологією (3 м) з залишком 0 м. Тобто, отриманий розв’язок виконує повністю замовлення, використовуючи вихідні заготовки та залишки від попередніх розкроїв, при чому кількість відходів дорівнює 0.

Висновки

В роботі приведена загальна класифікація задач розкрою-пакування, розглянуті математичні моделі даного класу задач.

Виконано огляд методів розв’язку задач, які виникають при виробництві з виконанням лінійного розкрою мірного матеріалу. Складено схему-класифікацію підходів до розв’язку задачі розкрою-пакування.

Запропоновано ефективний метод розв’язування складних задач лінійного розкрою, в основу якого покладений метод точної квадратичної регуляризації. Метод EQR показав значно кращі результати при розв’язуванні багатьох тестових багатоекстремальних задач у порівнянні з існуючими методами [17]. Теж саме ми спостерігаємо і при розв’язуванні задач лінійного розкрою матеріалів.

Список використаної літератури

1. Канторович Л.В., Залгаллер В.А. Рациональный раскрой промышленных материалов / Л. В. Канторович, В. А. Залгаллер // Изд. 3-е, испр. и доп. СПб.: [Невский Диалект], 2012. – 303 с.
2. Gilmore P.C. A linear programming approach to cutting-stock problem [Text] /P.C. Gilmore, R.E. Gomory //Operations Research. – 1961. – Vol. 9, N 6. – P.849–859.
3. Desaulniers G. Column generation / G. Desaulniers, J. Desrosiers, M. M. Solomon. – New-York: Springer Science + Business Media, Inc., 2005. – 358 p.
4. Dyckhoff H. Cutting and packing in production and distribution [Text]: A typology and bibliography /H. Dyckhoff, U. Finke. – Heidelberg: Physica-Verlag, 1992. – 248 p.
5. Wascher G. An improved typology of cutting and packing problems [Text] /G. Wascher, H. Haussner, H. Schumann //European Journal of Operational Research. – 2007. – Vol. 183, N 3. – P.1109–1130.
6. Романовский, И. В. Алгоритмы решения экстремальных задач / И. В. Романовский. – М.: Наука, 1971. – 352 с.
7. Martello, S., and Toth, P. Optimal and canonical solutions of the change making problem // European Journal of Operational Research 4, 1980: 322–329.

8. Karelahti, J., Solving the cutting stock problem in the steel industry. Department of Engineering Physics and Mathematics. Master's thesis, 2002: 1–39.
9. Скобцов, Ю. А. К вопросу о применении метаэвристик в решении задач рационального раскроя и упаковки / Ю. А. Скобцов, В. Н. Балабанов // Вісник Хмельницького національного університету. – 2008. – Т. 1. № 4. – С. 205–217.
10. Belov G. A cutting plane algorithm for the one-dimensional cutting stock problem with multiple stock lengths [Text] /G. Belov, G.Scheithauer //European Journal of Operational Research. – 2002. – Vol. 141, N 2. – P. 274–294.
11. Fekete S.P. An exact algorithm for higher-dimensional orthogonal packing [Text] /S.P. Fekete, J. Schepers, J.C. van der Veen //Operations Research. – 2007. – Vol. 55, N 3. – P. 569–587.
12. Poldi K.C. Heuristics for the one-dimensional cutting stock problem with limited multiple stock lengths [Text] /K.C. Poldi, M.N. Arenales //Computers & Operations Research. – 2009. – Vol. 36, N 6. – P.2074–2081.
13. Косолап А. И. Глобальная оптимизация. Метод точной квадратичной регуляризации / А. И. Косолап. – Днепропетровск: ПГАСА, 2015. – 164 с.
14. Фонотов А. Н. Автоматизированная система гильотинного раскроя на основе генетического программирования (на примере мебельного производства): Дис .... канд. техн. наук: 05.13.07. – Донецк, 2006.
15. Мухачева Э. А., Картак В. М. Модифицированный метод ветвей и границ: алгоритм и Численный эксперимент для задачи одномерному раскроя // Информационные технологии. – 2000. – № 9. – С. 15–22.
16. Кодола Г.М Побудова технологічної матриці варіантів лінійного розкрою [Текст] //Г.М. Кодола, Б.Є. Рогоза // Вісник Національного технічного університету «ХПІ» – 2017. – № 23(1245). – Харків, НТУ «ХПІ», 2017. – С. 111–116, doi:10.20998/2413-4295.2017.23.18
17. Косолап А. И. Глобальная оптимизация. Численные эксперименты / А. И. Косолап. – Днепр: ПГАСА, 2017. – 112 с.