

DOI:

УДК 519.24

В.О. Стросва, к.ф.-м.н., доцент**В.І. Авраменко**, к.т.н., доцент

Дніпровський державний технічний університет, м. Кам'янське

ДОСЛІДЖЕННЯ РОЗПОДІЛУ ВИПАДКОВИХ ХОРД У СФЕРІ

З використанням методів теорії ймовірностей досліджено розповсюдження променів від точкових і розподілених джерел в об'ємах сферичної форми. Отримані аналітичні вирази для законів розподілу довжин хорд для різних вихідних даних моделей.

Ключові слова: сфера, хорда, закон розподілу, статистичне моделювання.

Is investigated the spread of rays from point and distributed sources in volumes of spherical form with the use of methods of probability theory. Are obtained the analytical expressions for the laws of distribution of the lengths of chord for different source data of models.

Keywords: sphere, chord, distribution law, statistical modeling.

Постановка проблеми

Задачі з використанням геометричної ймовірності часто мають назву «парадоксів» на ім'я тих авторів, які першими їх сформулювали. Кількість таких парадоксів досягає дюжини [4], і, як відмічає автор [3], «всі вони є ілюстрацією невизначеності поняття «навмання», яке часто зустрічається в геометричних (ймовірнісних) задачах». Тому деякі задачі розглядаються просто як технічні вправи чи «exercises for mind (вправи для розуму)».

На нашу думку, перед розв'язуванням кожної задачі на геометричну ймовірність необхідно скласти адекватну модель, на основі якої вибрати математичний апарат. Представляється, що для тривимірних моделей скласти таку модель легше, тому нами розглянута одна з «парадоксальних» моделей про довжину випадкової хорди для сфери.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Тема аналізу розподілів випадкових явищ з використанням геометричних ймовірностей має досить велику історію. Більше уваги приділено вивченню розподілу випадкової хорди в колі [2, 3, 4], в зведеному вигляді результати наведені в роботі [5].

Випадкова хорда в сфері може розглядатись як результат проникаючого радіоактивного випромінювання чи випромінювання при ультразвуковому обстеженні, тоді це буде потік променів з точкового джерела. Знаходження сфери в полі електромагнітного випромінювання однієї чи кількох станцій стільникового зв'язку, розташованих на великій відстані, приводить до іншої моделі. Саме такий підхід дозволяє уніфікувати модель і позбавитись від «парадоксальності» задачі.

Формулювання мети дослідження

Нижче розглянуто кілька варіантів розподілу випадкових хорд у сфері радіусом r в залежності від розташування джерела випадкових променів. Паралельно наводяться без виведення отримані раніше [5] результати для відповідних двовимірних моделей відносно кола, яке можна розглядати як переріз кругового циліндра.

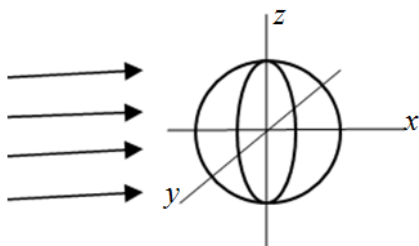


Рис. 1. Модель паралельних променів

Якщо джерело випромінювання достатньо віддалено, то промені можна вважати паралельними між собою і перпендикулярними до площини великого кола сфери (рис. 1). Прийmemo рівномірний закон розподілу променів у просторі, отже щільність розподілу на площині великого кола дорівнює

$$f(y, z) = \begin{cases} \frac{1}{\pi r^2} & \text{при } \sqrt{y^2 + z^2} < r \\ 0 & \text{при } \sqrt{y^2 + z^2} > r \end{cases}$$

Довжина хорди, перпендикулярної до площини великого кола, однозначно визначається відстанню $\rho = \sqrt{y^2 + z^2}$ від центра кола. Інтегральна функція розподілу відстані ρ знаходиться з виразу

$$F(\rho) = \iint_{\sqrt{y^2+z^2}<\rho} \frac{1}{\pi r^2} dy dz = \frac{1}{\pi r^2} \int_{-\rho}^{\rho} dy \int_{-\sqrt{\rho^2-y^2}}^{\sqrt{\rho^2-y^2}} dz = \dots = \frac{\rho^2}{r^2}.$$

Тоді щільність розподілу відстані променю від центру

$$f(\rho) = F'(\rho) = \frac{2\rho}{r^2} \quad 0 < \rho < r.$$

Враховуючи, що довжина хорди складає $l = 2\sqrt{r^2 - \rho^2}$, з використанням формул функцій випадкових величин [1], знаходимо

$$\rho_{(l)} = \sqrt{r^2 - 0,25 \cdot l^2}, \quad \rho'_{(l)} = -\frac{1}{4} \frac{l}{\sqrt{r^2 - 0,25l^2}}.$$

Отже щільність розподілу довжини випадкової формули в розглядуваній моделі

$$f(l) = f(\rho_{(l)}) \cdot \rho'_{(l)} = \frac{l}{2r^2} \quad 0 < l < 2r. \quad (1)$$

Розподіл є лінійним, його числові характеристики $M(L) = 1,333r$, $D(L) = 0,222r^2$.

Для аналогічної моделі в колі щільність розподілу довжини випадкової хорди описується формулою, яка суттєво відрізняється від попередньої,

$$f(l) = \frac{l}{2\sqrt{4r^2 - l^2}} \quad 0 < l < 2r. \quad (2)$$

Числові характеристики $M(L) = 1,572r$, $D(L) = 0,199r^2$ [5].

Виклад основного матеріалу

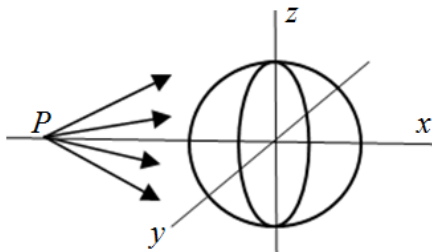


Рис. 2. Модель променів з джерела

Розглянемо модель, коли промені виходять з одного джерела (рис. 2), отже щільність розподілу променів в межах великого кола площини yOz не є сталою. Прийемо рівномірний розподіл променів з джерела в просторі, тобто щільність розподілу на поверхні сфери довільного великого радіусу R з центром в точці полюса P є сталою.

Моделювання такого розподілу є окремою задачею. Використання сферичної системи координат (ρ, θ, φ) виявилось не продуктивним, бо елемент ΔS поверхні сфери радіусом ρ виражається формулою $\Delta S = \rho^2 \cdot \sin \theta \cdot \Delta \theta \cdot \Delta \varphi$, тобто при рівномірному розподілу кутів θ і φ розподіл елементів ΔS далекий від рівномірного. Ситуацію можна виправити, якщо розподіл кута θ робити не рівномірним, а обернено пропорційним $\sin \theta$. Більш продуктивним є інший підхід до моделювання рівномірного у просторі розподілу променів з точкового джерела. Моделюється рівномірний розподіл на інтервалі $(-R, R)$ по кожній з координат x, y, z , тобто випадкові точки рівномірно розподілені в об'ємі кубу з стороною $2R$. Але в цьому випадку напрямні косинуси векторів з початку координат до випадкової точки мають нерівномірний розподіл внаслідок «більшої кількості» точок у напрямках до вершин кубу. Тому слід розглядати тільки точки, які належать сфері радіусом R , які складають приблизно 52 % від усієї кількості точок. В цьому випадку розподіл кожної з координат випадкової точки суттєво відрізняється від рівномірного, але розподіли кожного з трьох напрямних косинусів випадкових векторів стають рівномірними на інтервалі $(-1, 1)$, наслідком чого є рівномірний у просторі розподіл векторів.

Нехай початок координат точка M , співпадає з джерелом променів, а сфера радіусом r розташована на відстані p від джерела. На рис. 3 показано осьовий перетин, який проходить через центр сфери точку $O(p, 0, 0)$ та точку $M(0, 0, 0)$. Випадковий промінь MN , який перетинає

сферу, утворює хорду випадкової довжини $|AB|=l$. За побудовою $|MO|=p$, рівняння прямої MN має вид $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, рівняння сфери $(x-p)^2 + y^2 + z^2 = r^2$.

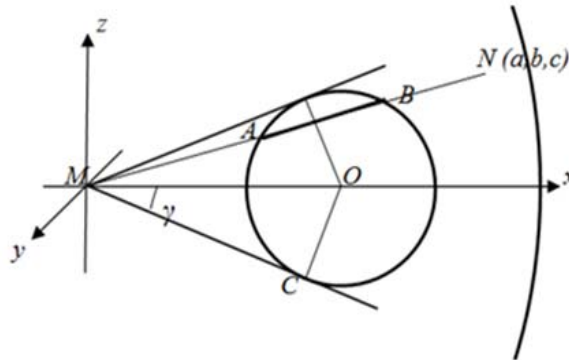


Рис. 3. Осьовий перетин моделі з полюсом

Розв'язуючи сумісно два останніх рівняння, знаходимо координати точок перетину прямої та сфери, відстань між якими дорівнює довжині хорди

$$l = 2 \frac{\sqrt{a^2 p^2 + (r^2 - p^2)(a^2 + b^2 + c^2)}}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Перетворимо попередню формулу

$$l = 2 \sqrt{\frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} p^2 - (p^2 - r^2)} = 2 \sqrt{u^2 p^2 - (p^2 - r^2)}. \quad (3)$$

де $u = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} = \cos \alpha$ — напрямний косинус випадкового променя \overrightarrow{MN} , α — кут \widehat{NMO} між віссю абсцис і променем. Вочевидь, що цей кут однозначно визначає довжину випадкової хорди AB . Як слідує з рис. 3, можливі значення кута $0 < \alpha < \gamma = \arcsin \frac{r}{p}$, отже $\frac{\sqrt{p^2 - r^2}}{p} < u < 1$. Тому що розглядається рівномірний у просторі розподіл променів, на інтервалі можливих значень напрямних косинусів розподіл теж є рівномірним, отже щільність розподілу має вид

$$f(u) = C = \frac{p}{p - \sqrt{p^2 - r^2}} \quad \frac{\sqrt{p^2 - r^2}}{p} < u < 1.$$

Знову з використанням формул функцій випадкових величин, отримуємо

$$u_{(l)} = \frac{\sqrt{l^2 + 4 \cdot (p^2 - r^2)}}{2p}, \quad u'_{(l)} = \frac{l}{2p \sqrt{l^2 + 4 \cdot (p^2 - r^2)}}$$

і, як результат, щільність розподілу довжини хорди

$$f(l) = \frac{1}{2(p - \sqrt{p^2 - r^2})} \cdot \frac{l}{\sqrt{l^2 + 4 \cdot (p^2 - r^2)}} \quad 0 < l < 2r. \quad (4)$$

Математичне сподівання розподілу і дисперсія мають мало інформативний вид. Для відповідної моделі в колі розподіл довжини хорди має вид

$$f(l) = \frac{1}{\arcsin \frac{r}{p}} \cdot \frac{l}{\sqrt{4r^2 - l^2} \sqrt{4p^2 - (4r^2 - l^2)}} \quad 0 < l < 2r. \quad (5)$$

На рис. 4 наведені графіки щільності розподілу довжин випадкових хорд у сфері для різних значень p (відстані джерела від центру сфери). Можна відмітити, що при $p \rightarrow \infty$ (реально для $p > 2$) формула (4) описує модель сфери в потоці паралельних променів і співпадає з формулою (1). Те саме відбувається з моделлю для кола — при збільшенні p формула (5) наближається до формули (2).

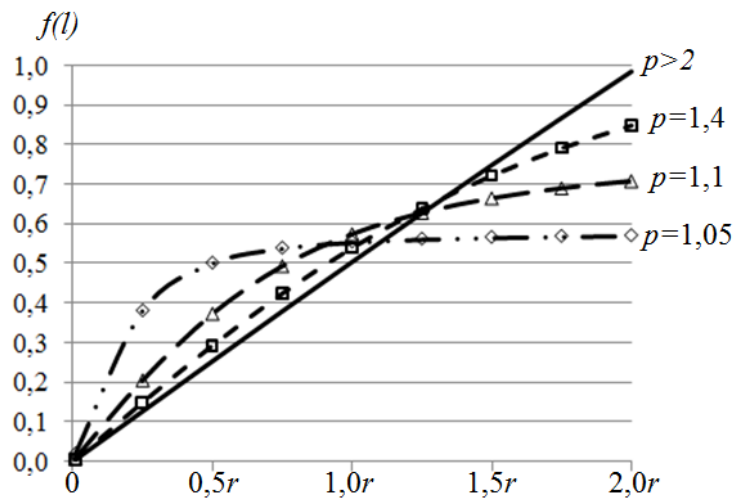


Рис. 4. Графіки щільності розподілу довжин хорд (джерело зовні сфери)

При $p \rightarrow r$, коли джерело променів розташоване на поверхні сфери, розділ довжин хорд стає рівномірним

$$f(l) = 0,5r \quad 0 < l < 2r, \quad p = 1.$$

Для кола при $p \rightarrow r$ формула (5) приймає вид

$$f(l) = \frac{2}{\pi\sqrt{4r^2 - l^2}} \quad 0 < l < 2r,$$

який співпадає з відповідною формулою в роботі [5].

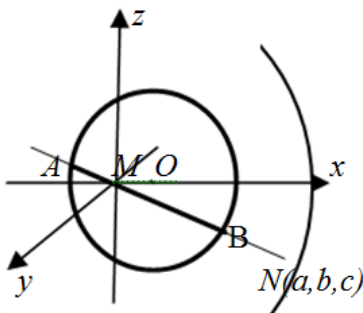


Рис. 5. Джерело у сфері

Наступною можна розглянути модель, коли джерело променів знаходиться в середині сфери на відстані p від центру сфери (рис. 5, показано осевий перетин через джерело і центр сфери). Як і в попередній моделі, розв'язуючи сумісно рівняння довільної прямої, що проходить через джерело — початок координат і точку $N(a, b, c)$, і рівняння сфери з центром в точці $O(p, 0, 0)$, отримуємо вирази для довжини хорд

$$l = \frac{\sqrt{a^2 p^2 + (a^2 + b^2 + c^2)(r^2 - p^2)} + a \cdot p}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Використовуючи, як і вище, позначення u для напрямного косинуса випадкового променя \overline{MN} , получимо спрощений вираз для довжин хорд

$$l = \sqrt{u^2 p^2 + (r^2 - p^2)} + u \cdot p.$$

Слід розглянути окремо випадки, коли промені з точки M виходять з рівномірним розподілом в усьому просторі або тільки у півпросторі $a > 0$. В першому випадку існують обидві хорди AM і MB , довжини яких міняються на інтервалах $(r - p, \sqrt{r^2 - p^2})$ і $(\sqrt{r^2 - p^2}, r + p)$ відповідно, в другому випадку «існує» тільки хорда MB , довжина якої змінюється на інтервалі $(\sqrt{r^2 - p^2}, r + p)$. В першому випадку кут α напрямного косинуса вектора \overline{MN} міняється на інтервалі $(0, 2\pi)$. Якщо $\alpha = 0$, то $u = 1$ і довжина хорди $l = r + p$, при $\alpha = \pi$ $u = -1$ і довжина хорди $l = r - p$, при $\alpha = \pi/2$ і $\alpha = 3\pi/2$ $u = 0$ і $l = \sqrt{r^2 - p^2}$. Приймаючи рівномірний розподіл променів у просторі і, як наслідок, такий же розподіл напрямних косинусів u , отримуємо щільність розподілу величини u

$$f(u) = C = 0,5 \quad -1 < u < 1.$$

Розв'язуючи рівняння (14) відносно u , отримуємо

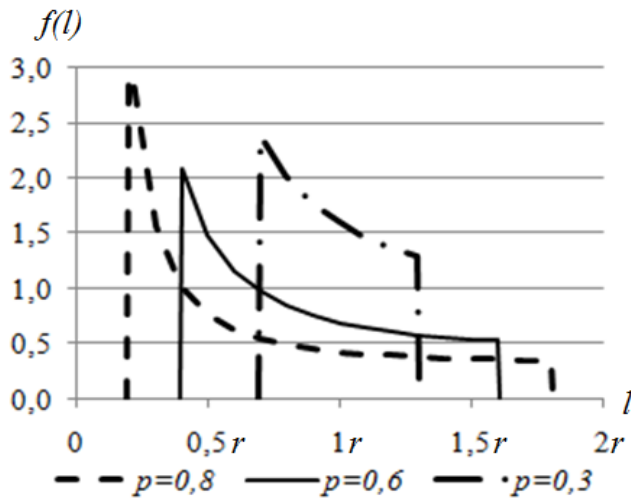


Рис. 6. Графіки $f(l)$ при рівномірному розподілі променів у просторі

$$u = \frac{l^2 - (r^2 - p^2)}{2l \cdot p}, \quad u'_l = \frac{1}{2p} \left(1 + \frac{r^2 - p^2}{l^2} \right),$$

$$f(l) = \left| \frac{1}{4 \cdot p} \cdot \left(1 + \frac{r^2 - p^2}{l^2} \right) \right| \quad \begin{matrix} r - p \\ < l \\ < r + p. \end{matrix} \quad (6)$$

На рис. 6 наведені графіки щільності розподілу довжин випадкових хорд для різних значень p на інтервалах $(r - p, r + p)$. Для від'ємних значень p інтервал можливих значень l залишається незмінним, отже формула (6) слухна і для $p < 0$.

У випадку, коли джерело променів є одностороннім, наприклад для $a > 0$, тоді напрямні косинуси променів рівномірно розподілені на інтервалі $(0, 1)$. Тому щільність $f(u) = C = 1,0 \quad 0 < u < 1$. Як результат, значення довжини l випадкової хорди належать інтервалам $(\sqrt{r^2 - p^2}, r + p)$ при $p > 0$ або $(r + p, \sqrt{r^2 - p^2})$ при $p < 0$. Вираз для щільності розподілу в обох випадках залишається незмінним

$$f(l) = \left| \frac{1}{2 \cdot p} \cdot \left(1 + \frac{r^2 - p^2}{l^2} \right) \right|. \quad (7)$$

На рис. 7 наведені графіки щільностей розподілу довжин хорд для джерела з одностороннім випромінюванням, які мають досить складний вид. Зокрема при $p = r$, коли джерело розташоване на поверхні сфери, розподіл стає рівномірним на інтервалі $(0, 2r)$, що відповідає вище наведеному наслідку формули (4).

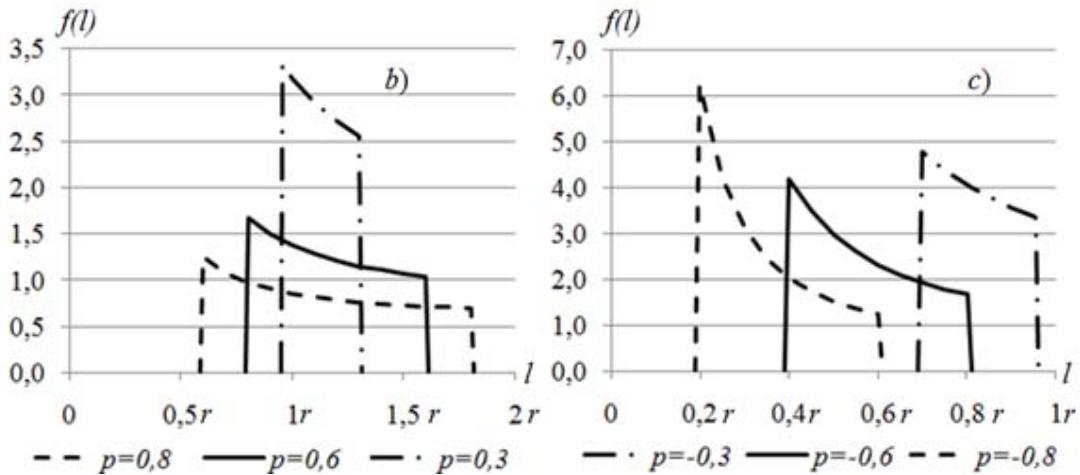


Рис. 7. Графіки $f(l)$ при розподілі променів у півпросторі а) $a > 0$. б) $p > 0$; в) $p < 0$

Для кола аналогічна модель описується формулою

$$f(l) = \frac{1}{\pi l} \frac{l^2 + (r^2 - p^2)}{\sqrt{4p^2 l^2 - (l^2 - (r^2 - p^2))^2}} \quad r - p < l < r + p, \quad (8)$$

а при $p = r$ отримуємо щільність розподілу

$$f(l) = \frac{1}{\pi \sqrt{4r^2 - l^2}} \quad 0 < l < 2r,$$

яка співпадає з результатом, отриманим в роботі [5].

Висновки

Слід ще розглянути модель з кількома джерелами променів, зокрема коли вони розподілені довільно у просторі. Тоді сфера перетинається променями в довільних напрямках. Статистичною моделлю може слугувати модель, коли через дві довільні точки простору $M(x_1, y_1, z_1)$ і $N(x_2, y_2, z_2)$ проходить пряма, точки перетину якої з сферою радіусом r з центром в початку координат задовольняють квадратному рівнянню, дискримінант якого

$$Diskr = (AC + BD)^2 - (1 + A^2 + B^2)(C^2 + D^2 - r^2) > 0.$$

Тут

$$A = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad B = \frac{z_2 - z_1}{x_2 - x_1}, \quad C = y_1 - x_1 A, \quad D = z_1 - x_1 B.$$

Враховуючи, що довжина хорди l є відстанню між точками перетину прямої і сфери, отримуємо

$$l = 2 \sqrt{\frac{Diskr}{1 + A^2 + B^2}} = 2 \sqrt{\frac{(AC + BD)^2}{1 + A^2 + B^2} - (C^2 + D^2 - r^2)}.$$

В загальному випадку отримати вираз щільності розподілу довжини хорди при довільних розподілах координат точок M і N є складною задачею. Приймаючи, як і вище, рівномірний розподіл координат цих точок в межах сфери великого радіусу R , методом статистичного моделювання отримано, що функціонал $F = \frac{Diskr}{1 + A^2 + B^2}$ має рівномірний розподіл на інтервалі $(0, r^2)$, зокрема $F=0$ коли пряма MN є дотичною до сфери, і $F=r^2$ коли $C=D=0$ і пряма проходить через центр сфери.

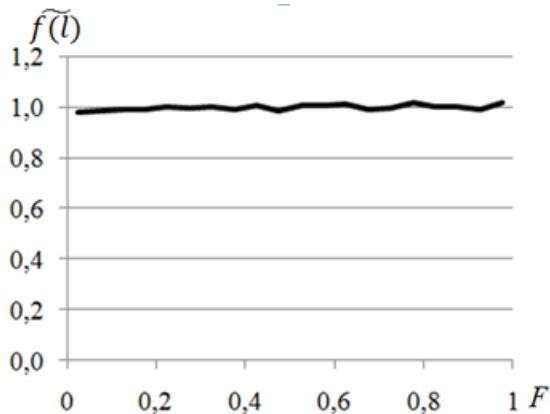


Рис. 8. Статистичний розподіл функціонала $F(r=1)$

Аналогічні висновки про однаковість результатів для віддаленого і розподілених джерел отримані в роботі [5] для кола.

Слід зауважити, що висновки про довжини випадкових хорд слушні для абсолютно прозорих середовищ і в загальному випадку повинні розглядатись як імовірності напрямків променів в сфері. Якщо розподіл променів з джерела задано законом, відмінним від рівномірного, розподіл довжин випадкових хорд в сфері може бути оцінений як аналітичними, так і статистичними методами.

Список використаної літератури

1. Авраменко В.І. Теорія ймовірностей і математична статистика: навч. посібник / В.І. Авраменко, І.К. Карімов – 2-ге вид., перероб. і доповн. – Дніпродзержинськ: ДДТУ, 2013. – 254с.
2. Вуколов Э.А. Сборник задач по математике для втузов. Специальные курсы / Э.А. Вуколов, А.В. Ефимов, В.Н. Земсков и др. Под ред. А.В. Ефимова – М., 1984. – 607 с.
3. Мостеллер Ф. Пятьдесят занимательных вероятностных задач с решениями / Ф. Мостеллер, – М.: Наука, 1975. – 112 с.

На рис. 8 наведено графік статистичної щільності розподілу функціонала F для $r=1$, $R=10$, об'єм вибірки $n = 4 \cdot 10^5$. Тому можна прийняти, що щільність розподілу функціоналу

$$f(F) = C = \frac{1}{r^2} \quad 0 < F < r^2.$$

Враховуючи, що $F(l) = l^2/4$, $F'(l) = l/2$, тоді за відповідними формулами отримуємо

$$f(l) = \frac{l}{2r^2} \quad 0 < l < 2r. \quad (9)$$

Отриманий вираз розподілу довжини випадкової хорди для розподілених джерел повністю співпадає з таким для одиночного віддаленого джерела (формула (1)) і підтверджується результатами статистичного моделювання.

4. Секей Г. Парадоксы в теории вероятностей и математической статистике / Г. Секей, Пер. с англ. – М.: Мир, 1990. – 240 с.
5. Строева В.О., Авраменко В.І. Дослідження розподілу довжини хорди в колі / В.О. Строева, В.І. Авраменко // Питання прикладної математики і математичного моделювання: збірник наукових праць. – Д.: ДНУ, 2015. – Вип. 15., с. 181–190.

STUDY OF THE DISTRIBUTION OF RANDOM CHORDS IN THE SPHERE

Stroieva V.O, Avramenko V.I.

Abstract

In this paper we consider the problem of determining the length of a random chord, which is often associated with problems such as paradoxes. It is concluded that the use of three-dimensional models allows us to consider cases when uncertainty disappears when solving problems.

It was investigated the distribution of random chords in a sphere by the example of rays from sources, whose positions may be different in relation to the sphere. If the source is sufficiently far from the middle of the sphere, then the rays can be considered parallel, and it turns out that the density distribution of the length of random chords is linear and expressed by the formula $f(l) = \frac{l}{2r^2}$ $0 < l < 2r$, where r is the radius of the sphere.

For other provisions of the source relative to the sphere, the model of the uniform distribution in the distribution space is considered. It is assumed that this is a distribution, when the probability of attack on the surface element of the sphere of an arbitrary radius R with the center at the point of the source of the rays is constant. To simulate such a distribution, an even distribution of each coordinate in the interval $(-R, R)$ is used, using the condition that the distance from the point from the source does not exceed R . In this case, all three directions of the cosine of the rays are uniformly distributed, which ensures the same probability of impact on the element of the surface of the sphere. Separately obtained distribution laws for the position of the source both outside the scope and in the middle of the volume. In particular, in the position of the source on the surface of the sphere, the distribution of the lengths of random chords is uniform with the density of distribution $f(l) = 0,5r$ $0 < l < 2r$.

Analyzing the influence of several random sources, it has been shown that mathematically it is described by the same dependencies as for one remote source.

If the distribution of rays from a source is determined by a law that is not homogeneous, the distribution of the length of random chords in the sphere can be estimated by both analytical and statistical methods.

References

- [1] Avramenko V.I. Probability Theory and Mathematical Statistics: Teaching. manual. / V.I. Avramenko, I.K. Karimov – 2nd form., processing. and complemented – Dniprodzerzhinsk: DSTU, 2013. – 254 p.
- [2] Vukolov E.A. Collection of Math Problems for vtusov. Special courses. / E.A. Vukolov, A.V. Efimov, V.N. Zemskov and others. Ed. A. V. Efimova – M., 1984. – 607 p.
- [3] Mosteller F. Fifty entertaining probabilistic problems with solutions. / F. Mosteller. – M.: Nauka, 1975. – 112 p.
- [4] Sekey G. Paradoxes in probability theory and mathematical statistics. / G. Sekey. Per. from english – M.: Mir, 1990. – 240 p.
- [5] Stroieva V.O., Avramenko V. I. Investigation of the distribution of the length of the chord in the circle. / V.O. Stroieva, V.I. Avramenko // Questions of Applied Mathematics and Mathematical Modeling: a collection of scientific works. – D.: DNU, 2015. – W. 15, p. 181–190.