DOI:
УДК 519.6:519.7
О.О. Шумейко, д.т.н., професор, sumeiko_a@ukr.net
А.О. Іскандарова-Мала, аспірант, anastasia.iskandarova@gmail.com
Н.М. Лимар, завідувач лабораторії, ninel-71@ukr.net

ПРО ОБЧИСЛЕННЯ СКЛАДНОСТІ ЗАВДАНЬ

Стаття присвячена пошуку методів побудови рейтингу завдань для перевірки рівня знань учнів і студентів. Запропоновано використати ітераційний метод головних компонент. Проекція кожної точки, яка відповідає кожному завданню на головний напрям дозволяє звести точку багатовимірного простору до точки на прямій і тим самим поставити у відповідність кожній точці дійсне число, яке і буде характеризувати рейтинг поставленого завдання.
***Ключові слова**: завдання, складність, метод головних компонент.*

The article is devoted to the search for methods for constructing a rating of tasks for checking the level of knowledge of students and students. It is proposed to use the iterative method of the main components. The projection of each point that corresponds to each task in the main direction allows us to reduce the point of a multidimensional space to a point in a straight line and thereby put in correspondence with each point a real number that will characterize the rating of the task.
***Keywords**: tasks, complexity, method of main components.*

Постановка проблеми

Контроль рівня знань є ключовим елементом навчального процесу, і для реалізації об'єктивної оцінки важливо мати більш-менш реальну інформацію стосовно складності завдань для наявного контингенту учнів або здобувачів вищої освіти. Під час використання комп'ютерних програм перевірки знань виникає складна проблема оцінки кожного завдання з метою побудови об'єктивної шкали оцінки учнів. Так як створити комплект завдань з однаковою складністю неможливо, то бажано, якимсь чином, провести рейтинг складності завдань.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

На сьогодні є два основних напрямки, які дають включають у себе обчислення складності завдань – перший, класична теорія тестів, яка основана на статистичних методах і головним чином досліджує весь тест в цілому. Другий — це сучасна теорія тестів, яка основана на профілях IRT (Item Response Theory). І в цьому випадку в якості об'єкту, що розглядається, є кожне окреме тестове питання. В даній роботі для розв'язання даної задачі запропоновано використати векторну модель у багатовимірному просторі для оцінки рейтингу завдань.

Формулювання мети дослідження

Розглянути відповідь по кожному завданню, як точку в багатовимірному просторі, розмір якого співпадає з кількістю студентів, які відповіли на дане питання. Таким чином усі відповіді формують багатовимірну хмару, яка витягнута уздовж деякого головного напряму. В якості рейтингу кожного завдання брати проекцію точки багатовимірного простору на цей головний напрям. Отримати метод фільтрації, який дозволяє відкинути некоректні дані, спираючись на той факт, що точка, яка лежить досить далеко від отриманої хмари, не характеризує складність завдань в цілому.

Виклад основного матеріалу

Нехай $T_1, T_2, ..., T_n$ — множина задач, а $X_{i,j}\ (i = 1,2,..., m;\ j = 1,2,..., n)$ — оцінка, отримана *i*-м учнем за виконання *j*-го завдання. Таким чином, кожному завданню $T_j\ (j = 1,2,..., n)$ відповідає точка $x_j\ (j = 1,2,..., n)$ у *m*-вимірному просторі з координатами $X_{i,j}\ (i = 1,2,..., m;\ j = 1,2,..., n)$. Очевидно, що у разі, коли всі задачі мають майже однакову складність і всі учні, які навчаються мають рівень знань, який не суттєво відрізняється, то всі точки формують хмару, яка вписується в деякий еліпсоїд. Для того, щоб на основі множини оцінок

$X_{i,j}$ кожному завданню T_j $(j = 1,2,..., n)$ поставити у відповідність одне число C_j $(j = 1,2,..., n)$, яке буде відповідати узагальненому значенню складності (complexity) завдання, доцільно знайти проекції цих точок на головну вісь даного еліпсоїду, тим чином кожному завданню буде поставлено у відповідність одне число, яке отримане з урахуванням складності всіх завдань усіма учнями.

Для вирішення цієї задачі використаємо метод головних компонент [1—2].

Нехай $\{e_1,...,e_k\}$ ортонормований базис *W*. Довільний вектор з *W* може бути записаний у вигляді лінійної комбінації векторів базису, тобто, x_1 можна поставити у відповідність деякий вектор $\sum_{i=1}^{k}\alpha_{1,i}e_i$ із *W*. Похибка між ними обчислюється наступним чином:

$$\varepsilon_1 = \left\| x_1 \quad \sum_{i=1}^{k}\alpha_{1,i}e_i \right\|_2^2 = \left\langle x_1 \quad \sum_{i=1}^{k}\alpha_{1,i}e_i , x_1 \quad \sum_{i=1}^{k}\alpha_{1,i}e_i \right\rangle.$$

Щоб обчислити повну похибку, необхідно знайти суму всіх помилок по всім x_j, тобто,

$$\varepsilon\underbrace{\left(e_1,...,e_k,\alpha_{1,1},...,\alpha_{n,k}\right)}_{unknowns} = \sum_{j=1}^{n}\varepsilon_j^2 = \sum_{j=1}^{n}\left\| x_j \quad \sum_{i=1}^{k}\alpha_{j,i}e_i \right\|_2^2. \tag{1}$$

Очевидно, що похибку треба мінімізувати, для чого знайдемо відповідні похідні і врахуємо обмеження на ортогональність $\{e_1,...,e_k\}$, але спочатку спростимо вираз (1):

$$\varepsilon\left(e_1,...,e_k,\alpha_{1,1},...,\alpha_{n,k}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left\| x_j \quad \sum_{i=1}^{k}\alpha_{j,i}e_i \right\|_2^2 = \sum_{j=1}^{n}\left\| x_j \right\|_2^2 \quad 2\sum_{j=1}^{n}x_j^T\sum_{i=1}^{k}\alpha_{j,i}e_i + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\alpha_{j,i}^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\left\| x_j \right\|_2^2 \quad 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\alpha_{j,i}x_j^T e_i + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\alpha_{j,i}^2.$$

Тоді

$$\frac{\partial}{\partial\alpha_{m,l}}\varepsilon\left(e_1,...,e_k,\alpha_{1,1},...,\alpha_{n,k}\right) = \quad 2x_m^T e_l + 2\alpha_{m,l}.$$

Необхідна і достатня умова екстремуму буде мати вигляд:

$$-2x_m^T e_l + 2\alpha_{m,l} = 0 \Rightarrow \alpha_{m,l} = x_m^T e_l.$$

Таким чином, помилка (1) прийме вигляд:

$$\varepsilon\left(e_1,...,e_k\right) = \sum_{j=1}^{n}\left\| x_j \right\|_2^2 \quad 2\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\left(x_j^T e_i\right)x_j^T e_i + \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\left(x_j^T e_i\right)^2.$$

Після спрощень, отримаємо:

$$\varepsilon\left(e_1,...,e_k\right) = \sum_{j=1}^{n}\left\| x_j \right\|_2^2 \quad \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{k}\left(x_j^T e_i\right)^2. \tag{2}$$

Зважаючи на те, що $\langle a,b\rangle = a^T b$ и $\langle b,a\rangle = \langle a,b\rangle$, маємо:

$$\left(a^T b\right)^2 = \left(a^T b\right)\left(a^T b\right) = \left(b^T a\right)\left(a^T b\right) = b^T\left(aa^T\right)b,$$

Таким чином,

$$\varepsilon\left(e_1,...,e_k\right) = \sum_{j=1}^{n}\left\| x_j \right\|_2^2 \quad \sum_{i=1}^{k}e_i^T \quad \sum_{j=1}^{n}\left(x_j x_j^T\right) \ e_i = \sum_{j=1}^{n}\left\| x_j \right\|_2^2 \quad \sum_{i=1}^{k}e_i^T S e_i,$$

де $S = \sum_{j=1}^{n}\left(x_j x_j^T\right)$ — коваріаційна матриця.

Наступним кроком буде мінімізація $\varepsilon\left(e_1,...,e_k\right) = \sum_{j=1}^{n}\left\|x_j\right\|_2^2 \quad \sum_{i=1}^{k} e_i^T S e_i$ при умові $e_i^T e_i = 1$ для всіх i. Використовуючи метод невизначених множників Лагранжа (Lagrange), введемо множину $\lambda_1,...,\lambda_k$ і, з урахуванням того, що $\sum_{j=1}^{n}\left\|x_j\right\|_2^2 \equiv Const$, отримаємо функцію цілі:

$$\ell\left(e_1,...,e_k\right) = \sum_{i=1}^{k} e_i^T S e_i - \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \left(e_i^T e_i - 1\right).$$

Так як, $\frac{d}{dX}\left(X^T X\right) = \frac{d}{dX}\langle X, X\rangle = 2X$ і якщо A симетрична матриця, то $\frac{d}{dX}\left(X^T AX\right) = 2AX$, маємо:

$$\frac{\partial}{\partial e_m}\ell\left(e_1,...,e_k\right) = 2Se_m \quad 2\lambda_m e_m = 0,$$

тобто,

$$Se_m = \lambda_m e_m.$$

Таким чином, необхідно знайти розв'язок рівняння $\left(S - \lambda I\right)e = 0$ (де I — одинична матриця), що еквівалентно тому, що λ_m і e_m є власні значення и власні вектори коваріаційної матриці S.

При цьому помилка має вигляд:

$$\varepsilon\left(e_1,...,e_k\right) = \sum_{j=1}^{n}\left\|x_j\right\|_2^2 \quad \sum_{i=1}^{k}\lambda_i \left\|e_i\right\|_2^2 = \sum_{j=1}^{n}\left\|x_j\right\|_2^2 \quad \sum_{i=1}^{k}\lambda_i. \tag{3}$$

Мінімізація (3) складається у виборі базису *Wз* k власних векторів матриці S, які відповідають k найбільшим власним значенням. Більше власне значення S дає більшу варіацію у напряму відповідного власного вектору, тобто, проекція X на підпростір розміру k, яка забезпечує найбільшу варіацію. Таким чином, метод головних компонент може бути інтерпретований наступним чином — беремо ортогональний базис і крутимо його, поки на одному з напрямів не отримаємо максимальну варіацію.

Саме цей напрям і потрібен.

Класичний метод головних компонент дозволяє точно розв'язати поставлену задачу, але використовує досить складні алгоритми при розв'язанні задачі на власні числа і власні вектори, не зважаючи на те, що потрібен тільки один вектор, який відповідає найбільшому власному значенню.

Для досягнення цієї мети розглянемо задачу (1) з іншої точки зору.

Розглянемо пошук однієї компоненти e_1, яка найкращим чином відновлює все дані $\{x_1,...,x_n\}$:

$$\varepsilon\left(e_1, \alpha_{1,1},...,\alpha_{n,1}\right) = \sum_{j=1}^{n}\left\|x_j \quad \alpha_{j,1}e_1\right\|_2^2 \to \min \tag{4}$$

по всім e_1 і $\{\alpha_{i,1}\}_{i=1}^{n}$ при умові $\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i,1}^2 = 1$.

При фіксованих $\{\alpha_{i,1}\}_{i=1}^{n}$ задача (4) розв’язується методом найменших квадратів. В силу того, що функція цілі є квадратичний функціонал, необхідна і достатня умови екстремуму співпадають. Таким чином, розв’язання задачі зводиться до пошуку розв’язку рівняння

$$\frac{\partial}{\partial e_1}\varepsilon\left(e_1,\alpha_{1,1},...,\alpha_{n,1}\right)= \quad 2\sum_{j=1}^{n}\left(x_j \quad \alpha_{j,1}e_1\right)\alpha_{j,1} = \quad 2\quad \sum_{j=1}^{n}x_j\alpha_{j,1} \quad \sum_{j=1}^{n}\alpha_{j,1}^{2}e_1 \quad .$$

Звідки маємо:

$$e_1=\frac{\sum_{j=1}^{n}x_j\alpha_{j,1}}{\sum_{j=1}^{n}\alpha_{j,1}^{2}},$$

Зважаючи на умову нормування одиницею, тобто $\sum_{i=1}^{n}\alpha_{i,1}^{2}=1$, маємо:

$$e_1=\sum_{j=1}^{n}x_j\alpha_{j,1} .$$

Наступний крок будемо робити з умови, що в задачі (4) відома компонента e_1 і треба знайти екстремум по $\{\alpha_{i,1}\}_{i=1}^{n}$:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_{v,1}}\varepsilon\left(e_1,\alpha_{1,1},...,\alpha_{n,1}\right)= \quad 2\left(x_v \quad \alpha_{v,1}e_1\right)e_1 = \quad 2\left(\left\langle x_v,e_1\right\rangle \quad \alpha_{v,1}\left\langle e_1,e_1\right\rangle\right)=0 ,$$

Тобто:

$$\alpha_{v,1}=\frac{\left\langle x_v,e_1\right\rangle}{\left\langle e_1,e_1\right\rangle},$$

де, $\langle x,y\rangle$ — скалярний добуток векторів *x* і *y*.

Далі, вважаючи знайдені $\{\alpha_{i,1}\}_{i=1}^{n}$ відомими, повторюємо весь процес, поки не буде досягнута стабілізація похибки. Отримані e_1 будемо вважати першою головною компонентою $\tilde{e}_1$.

Відповідне значення $\{\alpha_{i,1}\}_{i=1}^{n}$ будемо інтерпретувати як складність C_i завдання T_i.

Але отримані агреговані оцінки складності завдання спираються на кореляційні залежності даних, що можливо при умові відсутності викидів, тобто досить мало відрізняючого як рівня знань учнів або здобувачів вищої освіти, так і рівня складності завдань. На практиці, як одна, так і друга умови, як правило, не виконуються. В такому разі з наявної множини даних треба видалити ту інформацію, яка не відповідає основному тренду, тобто, провести фільтрацію даних. Для цієї мети використаємо значення відстані Махалонобіса кожної точки від центроїда множини цілком.

Відстань Махаланобіса розраховується як відстань від точки до центру маси множини всіх точок у багатовимірному просторі, який визначається корельованими (неортогональними) незалежними змінними. Якщо ж незалежні змінні некорельовані, відстань Махаланобіса співпадає з відстанню Евкліда. У даному випадку ця міра дозволяє визначити чи є дана точка викидом відносно інших значень незалежних змінних.

Відстань Махалонобіса між точками x_i та x_j визначається наступним чином:

$$\left\|x_i \quad x_i\right\|_M=\sqrt{\left(x_i \quad x_i\right)^T\Sigma^{\;\;1}\left(x_i \quad x_i\right)},$$

де $\sum$ — кореляційна матриця.

Таким чином, якщо $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ — центроїд множини, то в якості міри буде значення $DM_i = \left\| \bar{x} - x_i \right\|_M$.

Тоді, згідно [3], критичне значення DM_i для потрібного рівня α розраховується наступним чином:

$$DM_{[\alpha]} = \frac{m(n-1)^2 F_{[\alpha;v1=m;v2=n-m-1]}}{n\left(n-m-1+mF_{[\alpha;v1=m;v2=n-m-1]}\right)},$$

де $F_{[\alpha;v1=m;v2=n-m-1]}$ — значення розподілу Фішера (Фішера-Снедекора).

Таким чином, якщо $DM_i > DM_{[\alpha=0.05]}$, то з точністю P>0.05 точка x_i є викидом, якщо $DM_{[\alpha=0.1]} < DM_i < DM_{[\alpha=0.05]}$, то з точністю 0.05<$P$<0.1 ця точка є підозрілою на викид.

Результати експериментів

В якості експерименту дослідимо результати тестування з дисципліни «Економічна теорія». Всього тест містить 30 питань і 4 варіанти відповіді, тільки одна з яких вірна.

Таблиця 1. Результати тестування за завданнями (всього 30 питань)

	% вирішених завдань	Правильні відповіді	Неправильні відповіді	Оцінка рівня складності
Ср.значення	72,1	37,5	14,5	0,27
Ср.квадрат.відхилення	6,61	3,4	3,4	0,06
Макс.значення	90,4	47	22	0,4
Мін.значення	57,7	30	5	0,09

Використання запропонованого методу покроково представлено у таблиці 2. Як видно, похибка стабілізувалась на 4 ітерації.

Таблиця 2. Результати застосування методу

	1 крок		2 крок		3 крок		4 крок	
№ питання	$\{\alpha_{i,1}\}_{i=1}^{n}$	e_1	$\{\alpha_{i,1}\}_{i=1}^{n}$	e_1	$\{\alpha_{i,1}\}_{i=1}^{n}$	e_1	$\{\alpha_{i,1}\}_{i=1}^{n}$	e_1
1	0,267	0,370	0,197	-0,128	0,145	-0,177	0,096	0,161
2	0,477	0,147	0,407	-0,060	0,355	0,023	0,308	-0,126
3	0,477	0,099	0,407	0,088	0,355	0,174	0,308	-0,167
4	0,437	0,230	0,367	0,300	0,315	0,134	0,269	-0,285
5	0,497	0,202	0,427	0,400	0,375	0,040	0,327	0,031
6	0,397	0,178	0,327	0,016	0,275	-0,145	0,231	0,230
7	0,497	0,032	0,427	0,324	0,375	-0,214	0,327	0,261
8	0,437	-0,154	0,367	-0,050	0,315	-0,175	0,269	-0,207
9	0,537	-0,229	0,467	0,190	0,415	0,044	0,365	0,108
10	0,477	0,094	0,407	-0,025	0,355	0,018	0,308	-0,404
11	0,397	0,089	0,327	0,024	0,275	0,155	0,231	0,150
12	0,437	-0,164	0,367	-0,121	0,315	0,155	0,269	-0,222
13	0,377	0,209	0,307	-0,374	0,255	0,063	0,212	0,032
14	0,517	0,001	0,447	0,133	0,395	-0,021	0,346	-0,136
15	0,587	0,312	0,517	-0,247	0,465	-0,218	0,423	0,100
16	0,497	0,247	0,427	0,140	0,375	0,191	0,327	-0,148

Продовження таблиці 2

17	0,477	0,088	0,407	-0,055	0,355	0,011	0,308	0,033
18	0,457	0,155	0,387	0,149	0,335	0,245	0,288	0,081
19	0,587	0,237	0,517	0,210	0,465	-0,210	0,423	-0,155
20	0,457	0,136	0,387	-0,127	0,335	0,016	0,288	-0,291
21	0,337	-0,175	0,267	0,395	0,215	-0,101	0,173	-0,099
22	0,477	-0,022	0,407	0,009	0,355	-0,039	0,308	-0,140
23	0,397	-0,010	0,327	0,083	0,275	-0,369	0,231	0,053
24	0,397	-0,018	0,327	-0,016	0,275	-0,376	0,231	0,072
25	0,417	-0,007	0,347	-0,008	0,295	0,278	0,250	0,351
26	0,397	0,179	0,327	-0,106	0,275	0,188	0,231	0,143
27	0,397	0,370	0,327	0,136	0,275	0,165	0,231	0,055
28	0,397	-0,266	0,327	-0,043	0,275	0,325	0,231	0,126
29	0,457	0,052	0,387	-0,162	0,335	0,080	0,288	-0,196
30	0,437	-0,045	0,367	-0,135	0,315	-0,191	0,269	-0,177

Завдання тесту варіюються за рівнем складності: найлегше завдання має оцінку 0.096, а найважче – 0.423.

На рис.1 видно, що завдання № 19, 15, 7, 25, 1, 10 значно віддалені, вони є проблемними. Наприклад, питання №1 — найпростіше і напевне вносить дезінформацію у результати тестування. Питання №15 та №19 — навпаки, найскладніші і також потребують перегляду. Інші завдання мають нормальні показники складності, їх потрібно аналізувати додатково.

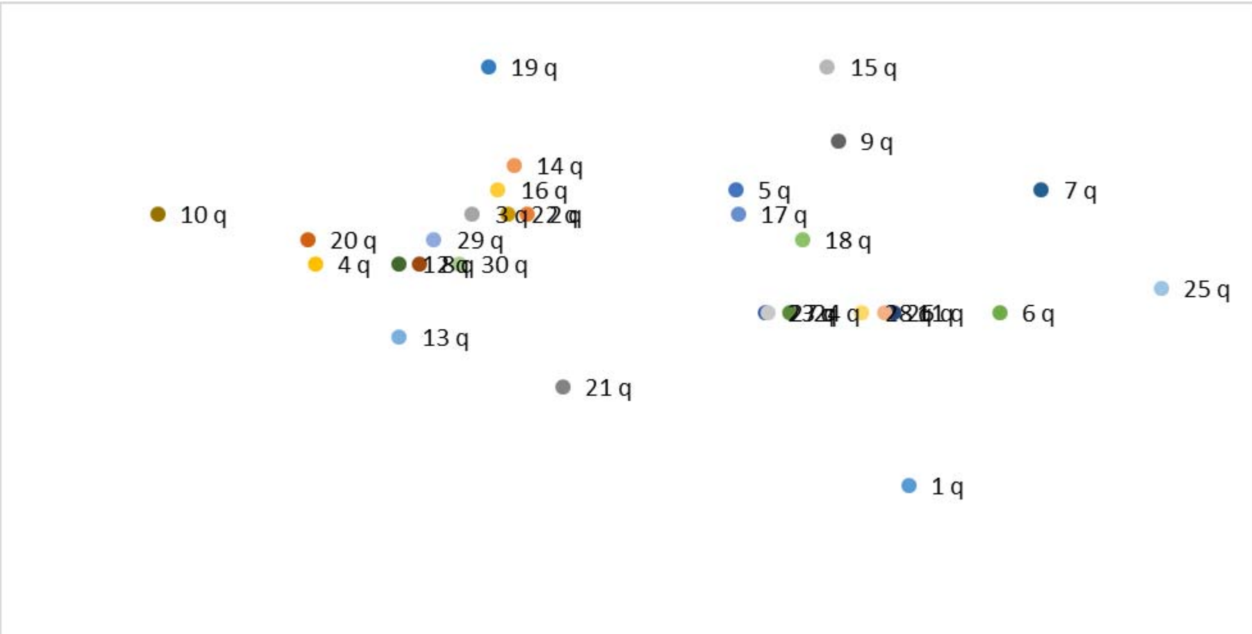

Рис.1. Складності завдань тесту

Висновки

Запропонований метод проведення рейтингу складності завдань дозволяє автоматизувати оцінку тесту для подальшого аналізу та покращення якості завдань та тестування. Представлений метод фільтрації дозволяє відкинути некоректні дані, спираючись на той факт, що точка, яка лежить досить далеко від отриманої хмари, не характеризує складність завдань в цілому.

Список використаної літератури

1. Прикладная статистика. Классификация и снижение размерности. / С.А. Айвазян, В.М. Бухштабер, И.С. Енюков, Л.Д. Мешалкин. – М.: Финансы и статистика, 1989. – 607 с.
2. Шумейко А.А. Интеллектуальный анализ данных (Введение в Data Mining) / А.А. Шумейко, С.Л. Сотник. – Днепропетровск: Белая Е.А., 2012. – 212 с.
3. Penny K. Appropriate critical values when testing for a single multivariate outlier by using the Mahalanobis distance / K.Penny // Applied statistics. – 1996. – №V. 45, № 1. – С. 73–81.
4. Вимірювання в освіті: Підручник / За редакцією О.В. Авраменко. – Кіровоград: Лисенко В.Ф., 2011. – 360 с.
5. Кухар Л.О. Конструювання тестів / Л.О. Кухар, В.П. Сергієнко. – Луцьк: Малежик М.П, 2010. – 182 с.
6. Шумейко О.О. Побудова профілів IRT за допомогою кусково-лінійної регресії з вільними вузлами / Шумейко О.О., Іскандарова-Мала А.О. // збірник КНУ. – 2016. – № 3(47). – С. 19–26.
7. Шумейко О.О. Вплив адаптивного тестування на профілі IRT / Шумейко О.О., Іскандарова-Мала А.О. // збірник КНУ. – 2017. – № 7(51). – С. 8–11.
8. Шумейко О.О. Про вибір параметрів ЕМ-алгоритму для поділу суміші розподілів / Шумейко О.О., Іскандарова-Мала А.О. // Сучасні інформаційні та комунікаційні технології на транспорті, в промисловості та освіті: Тези XI Міжнародної науково-практичної конференції. – 2017. – № 12. – С. 42.
9. Іскандарова-Мала А.О. Адаптивне тестування на основі профілів IRT / А.О. Іскандарова-Мала // Сучасні інформаційні та комунікаційні технології на транспорті, в промисловості та освіті: Тези XII Міжнародної науково-практичної конференції. – 2018. – № 13. – С. 178.

ABOUT COMPATIBILITY OF TASKS COMPATIBILITY
Shumeyko O.O., Iskandarova-Mala A.O., Lymar N.M.

Abstract

Student knowledge and skills control is one of the main elements of the learning process. The effectiveness of managing educational work and the quality of the training of specialists depends on the correct organization of the control. Through control, a "feedback" is established between the teacher and the student, which allows assessing the dynamics of learning the learning material, the actual level of knowledge, skills and abilities, and, accordingly, makes appropriate changes to the organization of the learning process. Testing is an important part of knowledge control methods. The testing system is a versatile tool for identifying students' knowledge at all stages of the learning process. In modern conditions, knowledge of testing techniques and the creation of test-bench bases is a necessary component of the teacher's work.

The article is devoted to the search for methods for constructing a rating of tasks for checking the level of knowledge of students and students. The set of answers for each task is a point in a multidimensional space. All answers to all tasks form a cloud, in which you can find the main direction. The principal component method is used to search the main direction. It is proposed to use the iterative method of the main components. The projection of each point that corresponds to each task in the main direction allows us to reduce the point of the multidimensional space to a point in a straight line and thereby put in correspondence with each point a real positive number, which will characterize the rating of the task. The higher the number, the higher the rating.

When using computer knowledge testing programs, there is a complex problem of evaluating each task in order to build an objective assessment scale for students. Since creating a set of tasks with the same complexity is impossible, it is desirable, in some way, to conduct a rating of complexity of

tasks. The article proposes to consider the answer to each task as a point in a multidimensional space, the size of which coincides with the number of students who answered this question.

In this way, all responses form a multidimensional cloud that extends along a certain direction. In the projection, it is proposed, as a rating of each task, to take the projection of the point of multidimensional space into this main direction. In addition, a filtration method is proposed that allows you to discard incorrect data, because a point that is far enough away from the received cloud does not characterize the complexity of tasks in general.

The method of the main components can be interpreted as follows — we take an orthogonal basis and twist it until one of the directions gets the maximum variation. Just this direction we need.

The classic method of the main components allows you to accurately solve the problem, but uses rather complicated algorithms when solving the problem with own numbers and own vectors, even though we only need one vector that corresponds to the largest eigenvalue. In view of the fact that the objective function is a quadratic function, the necessary and sufficient conditions for the extremum coincide.

But the aggregated estimates of the complexity of the problem are based on the correlation data of the data, which is possible in the absence of emissions, that is, quite a bit different than the level of knowledge of pupils or applicants of higher education, and the level of complexity of tasks. In practice, both one and two conditions are usually not fulfilled. In this case, from the existing set of data it is necessary to delete the information that does not correspond to the main trend, that is, to filter the data. For this purpose, we use the value of the distance Mahalonobis of each point from the centroid of the set altogether.

The Mahalanobis distance is calculated as the distance from the point to the center of gravity of the set of all points in the multidimensional space, which is determined by correlated (nonorthogonal) independent variables. If the independent variables are uncorrelated, the Mahalanobis distance coincides with the distance of Euclidean. In this case, this measure determines whether a given emission point is relative to other values of independent variables.

As an experiment, we will examine the results of testing in the discipline "Economic Theory". The total test contains 30 questions and 4 answers, only one of which is true. The error stabilized at 4 iterations. The proposed method allows automating the evaluation of the complexity of the test for further analysis and improving the quality of tasks and testing.

References

[1] Applied statistics. Classification and Dimension Reduction. / S.A. Ayvazyan, V.M. Buchstaber, I.S. Enyukov, L.D. Meshalkin. – Moscow: Finances and Statistics, 1989. – 607 p.

[2] Shumeiko AA, Sotnik S.L. Intellectual Data Analysis (Introduction to Data Mining). – Dnipropetrovsk: Belaya Ye.A., 2012. – 212 p.

[3] Penny K.I. Appropriate critical values when testing for a single multivariate outlier using the Mahalanob distance // Applied statistics. 1996. V. 45, No. 1. P. 73–81.

[4] Measurement in education: Textbook / Edited by O.V. Avramenko. – Kirovograd: Lysenko V.F., 2011. – 360 p.

[5] Designing tests / L.O. Kuhar, VP Sergienko – Lutsk, 2010. – 182 p.

[6] Shumeiko O.O., Iskandarova-Mala A.O. Construction of IRT profiles with the help of piecewise linear regression with free nodes / A.O. Iskandarova-Mala, O.O. Shumeiko // Collection of KNU. – 2016.

[7] Shumeiko O.O., Iskandarova-Mala A.O. Influence of adaptive testing on the profile of IRT / A.O.Iskandarova-Mala, O.Shumeiko // Collection of KNU. – 2017.

[8] Iskandarova-Mala A.O. On the choice of parameters of the EM algorithm for the division of a mixture of distributions / A.O. Iskandarova-Mala, O.O. Shumeiko // Mathematical modeling. – 2018.

[9] Iskandarova-Mala A.O. Adaptive testing based on IRT profiles / A.O. Iskandarov-Malaya // Modern information and communication technologies in transport, industry and education: Abstracts of the XI International scientific and practical conference. – 2017. – No. 11. – C. 178.