

DOI:

UDC 669.1:004.942:[531.314.2+519.62]

**K.S. Krasnikov**, PhD, senior lecturer, kir\_kras@ukr.net  
Dniprovsky state technical university, Kamianske

## MATHEMATICAL MODELING OF GYROSCOPE DYNAMICS BASED ON QUATERNION

*The paper is devoted to the mathematical description of gyroscope dynamics using quaternion as nonsingular representation of rotation. In the previous works related to wire dynamics the angles of spherical coordinate system can give wrong results in common configurations of a wire injected into a melt. Present paper considers two models that are constructed using Euler-Lagrange equations and compared in the problematic situation when one model gives unexpected trajectory of motion. Also for checking the model another experiment with precession was carried out. Presented pictures show 3d-model of gyroscope precessing under force of gravity with different speeds.*

**Keywords:** gyroscope, Euler-Lagrange equations, quaternion.

*Робота присвячена математичному опису динаміки гіроскопа з використанням кватерніону як несингулярного зображення обертання. У попередніх роботах, пов'язаних з динамікою проводів, кути сферичної системи координат можуть призвести до неправильних результатів у загальних конфігураціях дроту, введеного в розплав. У даному документі розглядаються дві моделі, побудовані за допомогою рівнянь Ейлера-Лагранжа і порівнюються в проблемній ситуації, коли одна модель дає несподівану траєкторію руху. Також для перевірки моделі проведено ще один експеримент з прецесією. Представлені малюнки показують 3D-модель переробки гіроскопа під впливом сили тяжіння з різною швидкістю.*

**Ключові слова:** гіроскоп, рівняння Ейлера-Лагранжа, кватерніон.

### Problem definition

At the previous works wire dynamics was modeled for metallurgical process. The wire is represented by system of rods. The angles of the spherical coordinates (zenith —  $\theta$  and azimuthal —  $\varphi$ ) are used for an expression of rod's direction vector  $\tau$ . There are configurations in which those angles shows famous drawback — computed rod's motion become numerically unstable and significantly nonrealistic. For example, when  $\sin(\theta) \rightarrow 0$  or when rod approaches to vertical orientation. Such orientation of rods is very common, because cored wire is injected vertically into a liquid metal. Trials of a simple avoidance of that problem didn't give any good result, so something better needs to be found. To overcome mentioned drawback scientists recommend using quaternions, which also have other advantages over the angles. Gyroscope dynamics is complex, that's why it is well suited for testing of quaternion components as generalized coordinates. Also gyroscope has orthogonal element, which can be used to model wire's torsion.

### Related publications

Author in his book [1] proposes three numerical algorithms to solve equations of motion using integration of a first-order systems. The first algorithm uses generalized coordinate partitioning and Newton-Raphson method at one of the steps. The second algorithm is direct integration that suffers from accumulation of constraint error; however it is simple and can be used when timestep is sufficiently small. The third hybrid algorithm uses constraint stabilization scheme, which was proposed by Baumgarte [2], to accelerate computation when error is in satisfactory range.

Authors of work [3, p. 155] propose adding the expression which corrects quaternion norm in a kinematic equation over time and solves deviation of it from unit norm problem. Because of quadratic dependency on the deviation the expression has potential nature and conserves mechanical energy.

In [4, p. 22—23] author states about numerical errors significantly arising when angles not only equals singular values, but also when they are in a neighborhood of the singular value. And these errors lead to decreasing timestep for numerical integration. Then he proposes usage of such nonsingular parameters as nine directional cosines with six dependent ones or more effective quaternion with

one dependent parameter based on Euler's rotation theorem. The author lists properties of quaternion about its unit norm, a changing sign of parameters, constructing transformation matrix (which only contains polynomial terms) from a given quaternion and getting a quaternion from an axis-angle representation of a rotation.

### Purpose of the research

The goal is a mathematical model of gyroscope dynamics using quaternion components as generalized coordinates to avoid unrealistic physical results in frequently met configurations of wire, which was presented in previous works for steel treatment in the ladle. Another model will be presented using the angles of the spherical coordinates to compare results of the both mathematical models.

### Research materials

A gyroscope is represented by propeller-like system of three rods. The first rod — axis of gyroscope — can be only rotated around its free end. The first rod is orthogonally connected to the second one and the third rod is just a mirror of the second one.

Let the unit vector  $\vec{\tau}^0$  correspond to the axis of the gyroscope and the unit vector  $\vec{n}^0$  — to the second rod (Fig. 1). The vector  $\vec{n}^0$  firstly rotates by an angle  $\varphi$  in the plane X-Y, and then quaternion  $q$  rotates both vectors  $\vec{n}^0$  and  $\vec{\tau}^0$  in space. Thus, orthogonality condition  $\langle \vec{n}, \vec{\tau} \rangle = 0$  will be satisfied. Every rod has length  $l$  and corresponding mass  $m_i$ . Radius-vectors  $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$  of the rods are defined as follows:

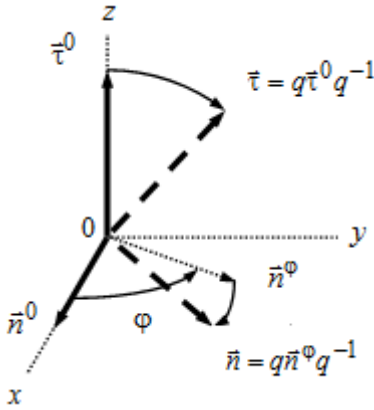


Fig. 1. Vectors transformations using angle  $\varphi$  and quaternion  $q$

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{2} l \vec{\tau}, \quad \vec{r}_2 = l \vec{\tau} + \frac{1}{2} l \vec{n}, \quad \vec{r}_3 = l \vec{\tau} - \frac{1}{2} l \vec{n}, \quad (1)$$

$$\vec{\tau}_x = 2(q_y q_0 + q_z q_x), \quad \vec{\tau}_y = 2(q_z q_y - q_x q_0), \quad \vec{\tau}_z = (q_z^2 - q_y^2 - q_x^2 + q_0^2), \quad (2)$$

$$\vec{n}_x = \cos(\varphi)(q_x^2 - q_y^2 - q_z^2 + q_0^2) + 2\sin(\varphi)(q_y q_x - q_z q_0), \quad (3)$$

$$\vec{n}_y = \sin(\varphi)(q_y^2 + q_z^2 + q_0^2 - q_x^2) + 2\cos(\varphi)(q_y q_x + q_z q_0), \quad (4)$$

$$\vec{n}_z = 2\sin(\varphi)(q_x q_0 + q_z q_y) + 2\cos(\varphi)(q_z q_x - q_y q_0). \quad (5)$$

Dynamics of the mechanical system is defined by Euler-Lagrange equations, which need kinetic and potential energy:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial K}{\partial \dot{q}_k^b} - \frac{\partial K}{\partial q_k^b} = - \frac{\partial P}{\partial q_k^b}, \quad (6)$$

$$K = \sum_{i=1}^3 \left[ \frac{m_i}{2} \langle \dot{\vec{r}}_i, \dot{\vec{r}}_i \rangle + \frac{I_i}{2} \langle \dot{\vec{\tau}}_i, \dot{\vec{\tau}}_i \rangle \right], \quad P = \sum_{i=1}^3 m_i \langle \vec{r}_i, \vec{g} \rangle + \frac{k}{2} (\langle q, q \rangle - 1)^2, \quad I_i = m_i \frac{1}{12} l^2, \quad (7)$$

where  $b$  — index of generalized coordinate (1..4 — for quaternion  $q$ , and 5 — for angle  $\varphi$ );  $\dot{\vec{\tau}}_i$  — speed of directional vector for  $i$ -th rod ( $i = 1..3$ );  $\vec{g}$  — gravitational acceleration;  $I_i$  — rotational inertia of  $i$ -th rod rotating about its center;  $k$  — coefficient of the quaternion  $q$  unit norm restoration (the larger it is, the better condition  $\langle q, q \rangle \approx 1$  is satisfied and as important consequence — approaching to unit norm of the vectors  $\vec{\tau}$  and  $\vec{n}$ ).

The symbolic differentiation, simplification and linearization of above equations leads to the system of linear algebraic equations that contain 5 equations and 5 unknown accelerations (4 — for quaternion components and 1 — for angle  $\varphi$ ), which can be found using known velocities and coordinates of rods.

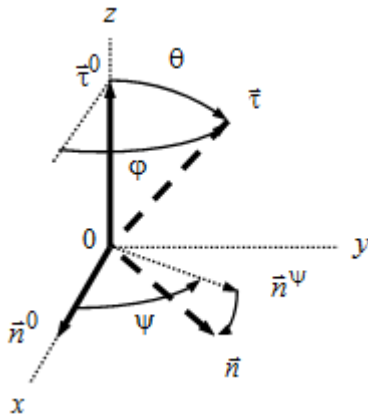


Fig. 2. Vectors transformations using angles  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$

The vector  $\vec{n}^0$  can be also rotated using quaternion multiplication and after simplifications using trigonometric identities above expressions are found again.

Now potential energy needs only gravitational terms:

$$P = \sum_{i=1}^3 m_i \langle \vec{r}_i, \vec{g} \rangle, \quad (12)$$

In this case the SLAE has 3 equations and 3 unknown accelerations. The effective decomposition of Cholesky can be used to solve SLAE  $M\ddot{x} = b$ , because of symmetry and positive-definition of the mass matrix  $M$ . Integration of accelerations is done using Euler-Cromer method.

There are initial conditions when unrealistic modeled motion of the gyroscope can be seen. For example, the axis of the gyroscope is in plane X-Y, and then it is rotated about z axis by 45 degrees. The second and the third rod are in plane X-Y:  $\vec{\tau} = (\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 0)$ ,  $\vec{n} = (\sqrt{2}/2, -\sqrt{2}/2, 0)$ ,  $\dot{\varphi} = \dot{\psi} = 1$  rad/s,  $m_i = 1$  kg,  $l = 1$  m. Results show significant difference for the first coordinate set (Fig. 3) and the second one (Fig. 4), especially after x coordinate of  $\vec{\tau}$  changes sign.

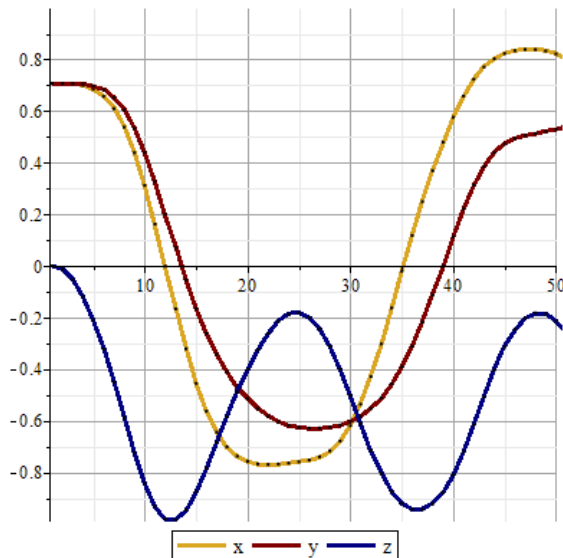


Fig. 3. Evolution of  $\vec{\tau}$  components in the case of quaternion  $q$  and angle  $\varphi$

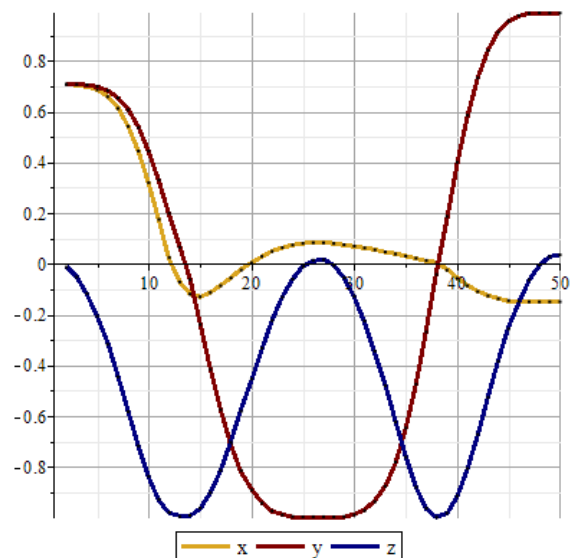
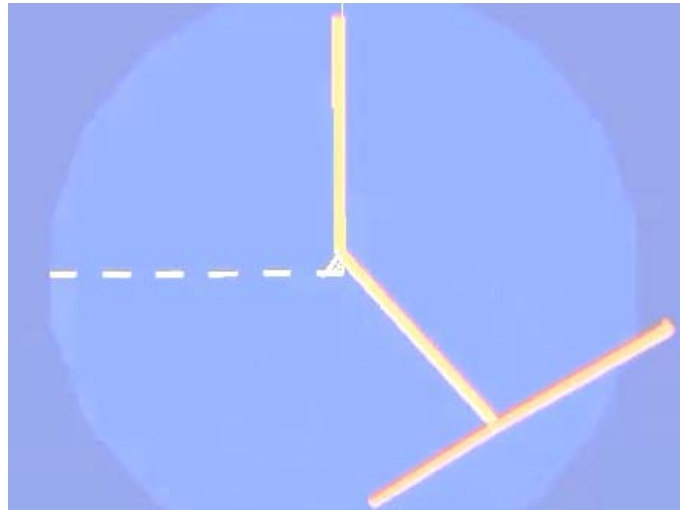


Fig. 4. Evolution of  $\vec{\tau}$  components in the case of angles  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\psi$

This unexpected behavior can be explained by diagonal elements of mass matrix tending to zero (feature of spherical coordinates), and, as consequence, numerical errors become very large.

There is famous effect of a spinning top — changing of spinning axis orientation (precession) under action of gravity — rotation about  $z$  axis. Our model of gyroscope also has this behavior (Fig. 5, 6, 7). At the start of the experiment the gyroscope oriented along  $x$ -axis and it has nonzero spin speed. The force of gravity acts along  $z$ -axis. During the experiment the gyroscope doesn't fall and rotates about  $z$ -axis. If mechanical energy is conserved then rotation lasts very long time. As showed on the pictures below, the higher initial speed of spin is, the lower the rotational speed of the gyroscope about  $z$  axis becomes. On the pictures dashed line is  $y$ -axis, solid line is  $x$ -axis, all pictures are top view.



*Fig. 5.* Configuration after 1 second — large precession when spin is low



*Fig. 6.* Another configuration after 1 second — medium precession when spin is medium



*Fig. 7.* The third configuration after 1 second — small precession when spin is high

In addition the video of the precessing gyroscope based on the built mathematical model is available on the Internet [5].

### Conclusions and future improvements

The quaternionic expression of  $\vec{\tau}$  gives more numerically stable solution. Eventually it requires 4 equations with additional term for unit norm, but they are simpler than expression with angles, because of trigonometric functions, which automatically preserve unit norm. In some applications such formulation using angles of spherical coordinate system is enough, but in case of cored wire dynamics the quaternion is a winner.

In future unit norm condition can be explicitly satisfied by definition of quaternion using three variables (angle-axis representation) in the expense of dividing operator appearing in equations of motion.

### List of reference links

- [1] Haug Edward J. Computer aided kinematics and dynamics of mechanical systems. Volume I: Basic methods. – Massachusetts: Allyn and Bacon, Inc, 1989. – 500 p. ISBN:0-205-11669-8.
- [2] Baumgarte, J. Stabilization of constraints and integrals of motion / Computer methods in applied mechanics and engineering, Vol. 1, 1972. – pp. 1–16.
- [3] Branets V.N., Shmuhlevskiy I.P. The use of quaternions in solid body orientation problems. – M.: “Nauka”, 1973. – 320 p. (in Russian).
- [4] Pogorelov. D. Yu. Introduction to modeling the dynamics of body systems: Training book. – Bryansk: BSTU, 1997. – 153 p. (in Russian). ISBN 5-230-02435-6.
- [5] Model of gyroscopic precession [Electronic resource] // Youtube channel “Kireal Lab”. Internet link: <https://youtu.be/0K3n3TelCjg>

## МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ДИНАМІКИ ГІРОСКОПУ НА ОСНОВІ КВАТЕРНІОНА Красніков К.С.

### Реферат

Автор статті розглядає проблему виродження кутів сферичної системи координат, що спричиняє нереалістичну поведінку дроту у металургійному процесі ковшового доведення сталі на прикладі руху гіроскопу. Орієнтація дроту під час перебігу даного процесу на протязі значного часу має вертикальний характер, при чому означена проблема виродження координати виникає саме при вертикальному розташуванні частини дроту (у попередніх роботах дріт представлявся пружньо з'єднаною системою стрижней). Тому з'являється необхідність пошуку інших можливостей моделювання динаміки, наприклад, за допомогою кватерніонів. Метою статті є математична модель на основі кватерніону з порівнянням її у проблемній ситуації, в якій модель на основі кутів сферичної системи координат дає нереалістичну траєкторію руху. Перевірити математичну модель запропоновано на гіроскопі — простому механізмі зі складною динамікою і ортогональністю елементів (яка також може бути використана для моделювання кручення дроту).

Гіроскоп представлено системою з трьох стрижнів, один з яких є віссю гіроскопа, а два інших зеркально-орієнтованих стрижня ортогонально приєднані до першого. Перший стрижень має можливість обертатися як навколо своєї вісі так і навколо вільного кінця, який не рухається у просторі. Радіус-вектори трьох стрижней визначено так, що умова ортогональності виконується автоматично у рівняннях руху. У першій математичній моделі узагальненими координатами обрано компоненти кватерніону і кут обертання навколо  $z$ -вісі. У другій моделі узагальненими координатами є зенітний, азимутальний і кут власного обертання. Динаміка гіроскопу визначається рівняннями Ейлера-Лагранжа, для яких подано вирази кінетичної та потенційної енергії. В результаті одержано систему лінійних алгебраїчних рівнянь відносно прискорень, яка розв'язується методом Холецького. Початковими умовами є розташування гіроскопа у площині  $X-Y$  з віссю оберненою на кут  $45^\circ$  навколо  $z$  і швидкістю власного обертання у  $1$  рад/с. Помил-

ку особливо видно на рисунках у момент зміни знаку  $x$ -компоненти вектора вісі. Також змодельовано відоме явище прецесії гіроскопа, причому як показано на рисунках швидкість прецесії зменшується у відповідь на збільшення власного обертання гіроскопу.

Отже визначення динаміки твердого тіла на прикладі гіроскопу за допомогою кватерніону має більш чисельно стабільний результат, хоча і потребує 4 рівняння на кватерніон, проте їх складові є легшими у порівнянні з тригонометричними операндами другої моделі. У майбутніх дослідження умова одиничної норми може бути також точно врахована у рівняннях руху використовуючи три параметри, але за рахунок ускладнення у вигляді операції ділення.

### Література

1. Haug Edward J. Computer aided kinematics and dynamics of mechanical systems. Volume I: Basic methods. – Massachusetts: Allyn and Bacon, Inc, 1989. – 500 p. ISBN:0-205-11669-8.
2. Baumgarte, J. Stabilization of constraints and integrals of motion / Computer methods in applied mechanics and engineering, Vol. 1, 1972. – pp. 1–16.
3. Бранец В.Н. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. / В.Н. Бранец, И.П. Шмыглевский. – М: «Наука», 1973. – 320 с.
4. Погорелов Д.Ю. Введение в моделирование динамики систем тел: уч. пособие. / Д.Ю. Погорелов. – Брянск: БСТУ, 1997. – 153 с. ISBN 5-230-02435-6
5. Модель прецесії гіроскопа [Електронний ресурс] // Youtube-канал “Kireal Lab”. Режим доступу: <https://youtu.be/0K3n3TelCjg> (дата звернення 10.09.2018 р.)