DOI:
УДК 519.876.5
Є.І. Калінін, к.т.н., доцент кафедри надійності, міцності та технічного сервісу машин, kalininhntusg@gmail.com
С.О. Поляшенко, к.т.н., доцент кафедри тракторів і автомобілів, s.polyashenko@gmail.com
Харківський національний технічний університет сільського господарства ім. Петра Василенка, м. Харків

РОЗВ'ЯЗОК СТАТИЧНОЇ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ НЕОДНОРІДНИХ ІЗОТРОПНИХ ТІЛ

В даній роботі викладається метод розв'язання статичної плоскої задачі теорії пружності для неоднорідних тіл шляхом послідовних наближень на основі застосування відображень типу Колосова, Мусхелішвілі і конформних перетворень. Для розв'язання граничних задач в разі неоднорідних тіл використовується спосіб послідовних наближень, вважаючи, що перше наближення відповідає тілу, на яке діють ті самі навантаження, але яке вважається однорідним, а наступні ітерації вводять поправки на неоднорідність.

В роботі доведено, що в найбільш загальному випадку квазістатичну задачу теорії в'язко-пружності, при наявності стаціонарного термічного поля, можна звести формально за допомогою перетворення Лапласа до пружно-статичної задачі для неоднорідного тіла, причому останню можна вирішити також зазначеним у роботі методом. При цьому відмічено, що отримання розв'язку в'язко-пружної задачі вимагає виконання зворотного перетворення, що пов'язано з досить великими обчислювальними труднощами, а отримання розв'язку для областей з неоднорідністю загального вигляду потребує визначення розв'язку, що відповідає тим самим областям в однорідному середовищі.

Ключові слова:*теорія пружності, ізотропність, комплексна змінна.*

In this paper, the method of solving the static plane problem of the theory of elasticity for non-homogeneous bodies is described by successive approximations based on the use of reflections of the Kolosov type, Muschelishvili and conformal transformations. To solve boundary problems in the case of non-homogeneous bodies, the method of successive approximations is used, assuming that the first approximation corresponds to the body on which the same loads work, but which is considered to be homogeneous, and subsequent iterations introduce corrections for heterogeneity.

It is proved in the paper that in the most general case, the quasi-static problem of the visco-elasticity theory, in the presence of a stationary thermal field, can be formally reduced by means of Laplace's transformation into an elastic-static problem for a non-uniform body, and the latter can also be solved by the method indicated in the work. It is noted that obtaining a solution of a visco-elastic problem requires the implementation of inverse transformation, which is associated with rather large computational difficulties, and obtaining a solution for areas with heterogeneity of general appearance requires the definition of an solution that corresponds to that the areas themselves in a homogeneous environment.

Keywords: *theory of elasticity, isotropy, complex variable.*

Постановка проблеми

Реальні тіла можуть мати початкову неоднорідність внаслідок включення стороннього матеріалу, композиції в одному тілі різних матеріалів або дефектів матеріалу, а також й індуктивну неоднорідність, яка викликана наявністю зовнішніх полів, і, головним чином, термічним полем. Відомо, що оператори, які визначають складові закони для в'язко-пружних матеріалів, містять параметри, які дуже чутливі до змін температури. У разі неоднорідного термічного поля ці параметри залежать від просторових координат. Вплив цієї індуктивної неоднорідності на розподіл напружень, викликаних зовнішніми силами, значно більше й довше, ніж ефект напружень, викликаних самим термічним полем [1]. Нехтування ж цим ефектом веде, навіть в найпростіших випадках, до фізично неприйнятних розв'язків.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Дослідженню плоскої задачі неоднорідних пружних тіл присвячений ряд робіт. Частина цих робіт, наприклад [2—4], виходить із спрощуючої гіпотези зміни одного модуля пружності, припускаючи коефіцієнт Пуассона постійним. Інша, як, наприклад, [5], розглядає випадок тіл, що складаються з об'єднання диз'юнктивних однорідних пружних областей.

Авторами [6—7] були запропоновані формули для комплексного відображення напружень і переміщень,які справедливі для пружних і в'язко-пружних тіл з безперервною однорідністю загального вигляду в плоскому і вісесиметричному випадку. В даній роботі викладається метод розв'язання статичної плоскої задачі теорії пружності для неоднорідних тіл шляхом послідовних наближень на основі застосування відображень типу Колосова [8], Мусхелішвілі [7] і конформних перетворень.

Формулювання мети дослідження

Метою роботи є зведення квазистатичної задачі теорії в'язко-пружності при наявності стаціонарного термічного поля до пружно-статичної задачі для неоднорідного тіла методами перетворення Лапласа.

Виклад основного матеріалу

Основні рівняння і формулювання граничних задач. Введемо в розгляд рівняння квазістатичної рівноваги, геометричні рівняння і складові рівняння неоднорідного в'язко-пружного середовища, що займає область R

$$\sigma_{ij,j} + X_i = 0\,,\ \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i})\,,\ s_{ij} = e_{ij} \circ dG_1\,,\ \sigma_{kk} = (\varepsilon_{kk} - 3\alpha T) \circ dG_2\,, \tag{1}$$

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\sigma_{kk}\delta_{ij}\,,\ e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}\delta_{ij}\,, \tag{2}$$

де σ_{ij} — тензор напружень; ε_{ij} — тензор деформації; u_i — складові пружного переміщення; X_i — масові сили; $T = T(x_i)$ — температура, що передбачається стаціонарною в точці $x_i \equiv (x_1, x_2, x_3)$ і виміряною відносно природного стану тіла; $\alpha = \alpha(x_i)$ — коефіцієнт, що залежить від природи матеріалу; $G_1 = G_1(x_i, t)\,, G_2 = G_2(x_i, t)$ — функції, що визначають в'язко-пружну поведінку середовища.

Символ $\circ$ являє собою конволюційний добуток типу Стилтьєса відповідних функцій.

Припустимо, що G_1, G_2, σ_{ij}, X_i, $\varepsilon_{ij}(f)$ належать до класу Φ^1, і мають порядок $O[\exp(p_0 t)]$ при $t \to \infty$ для $(x_i) \in R$, причому p_0 — довільна дійсна постійна. Застосовуючи перетворення Лапласа до рівнянь (1), отримаємо

$$\tilde{\sigma}_{ij,j} + X_i^* = 0\,,\ \tilde{\varepsilon}_{ij} = \frac{1}{2}(\tilde{u}_{i,j} + \tilde{u}_{j,i})\,,\ \tilde{s}_{ij} = pG_1 \circ \tilde{e}_{ij}\,,\ \tilde{\sigma}_{kk} = pG_2 \circ (\tilde{\varepsilon}_{kk} - 3\alpha\tilde{T})\,, \tag{3}$$

де $\tilde{f}(x_i, p) = \int_0^\infty e^{-pt} f(x_i, t)dt$, а $\operatorname{Re} p > p_0$.

У разі плоских задач, вводячи позначення $\sigma_{11} = \sigma_x$, $\sigma_{12} = \tau_{xy}$, …; $\varepsilon_1 = \varepsilon_x$, $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{xy}$,…; $u_1 = u$, $u_2 = v$ з (2) і (3) отримаємо:

$$\frac{\partial\tilde{\sigma}_x}{\partial x} + \frac{\partial\tilde{\tau}_{xy}}{\partial y} + \tilde{X} = 0\,,\ \frac{\partial\tilde{\tau}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial\tilde{\sigma}_y}{\partial y} + \tilde{Y} = 0\,, \tag{4}$$

$$\tilde{\varepsilon}_x = \frac{\partial\tilde{u}}{\partial x}\,,\ \tilde{\varepsilon}_y = \frac{\partial\tilde{v}}{\partial y}\,,\ \tilde{\varepsilon}_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\tilde{u}}{\partial y} + \frac{\partial\tilde{v}}{\partial x}\right), \tag{5}$$

$$\tilde{\sigma}_x = \tilde{\lambda}(\tilde{\varepsilon}_x + \tilde{\varepsilon}_y) + 2\tilde{\mu}\tilde{\varepsilon}_x - \tilde{k}\tilde{T}\,,\ \tilde{\sigma}_y = \tilde{\lambda}(\tilde{\varepsilon}_x + \tilde{\varepsilon}_y) + 2\tilde{\mu}\tilde{\varepsilon}_y - \tilde{k}\tilde{T}\,, \tag{6}$$

$$\tilde{\tau}_{xy} = 2\tilde{\mu}\tilde{\varepsilon}_{xy}\,,\ \tilde{\tau}_{yz} = \tilde{\tau}_{zx} = 0\,. \tag{7}$$

При цьому, для плоского деформованого стану

$$\tilde{\lambda} = \frac{1}{3} p(\tilde{G}_2 - \tilde{G}_1)\,,\ 2\tilde{\mu} = p\tilde{G}_1\,,\ \tilde{k} = p\alpha\tilde{G}_2\,, \tag{8}$$

$$\tilde{\sigma}_z = \frac{\tilde{G}_2 - \tilde{G}_1}{2\tilde{G}_2 + \tilde{G}_1}(\tilde{\sigma}_x + \tilde{\sigma}_y) - \frac{3G_1 \circ G_2 \circ p\alpha\tilde{T}}{2\tilde{G}_2 + \tilde{G}_1}\,,\ \tilde{\varepsilon}_z = 0\,, \tag{9}$$

а для плоского напруженого стану

$$\tilde{\lambda} = \frac{G_1 \circ (\tilde{G}_2 - \tilde{G}_1)p}{2\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2}\,,\ 2\tilde{\mu} = p\tilde{G}_1\,,\ \tilde{k} = \frac{3G_1 \circ G_2 \circ p\alpha}{2\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2}\,, \tag{10}$$

$$\tilde{\varepsilon}_z = \frac{\tilde{G}_1 - \tilde{G}_2}{2\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2}(\tilde{\varepsilon}_x + \tilde{\varepsilon}_y) + \frac{3\tilde{G}_2}{2\tilde{G}_1 + \tilde{G}_2}\alpha\tilde{T}\,,\ \tilde{\sigma}_z = 0\,. \tag{11}$$

Рівняння (4)—(7) ті ж, що і у випадку плоскої задачі неоднорідних пружних тіл [7]. Нижче для простоти запису тильда опускається.

У подальшому викладі припустимо, що ε_x, ε_y, ε_{xy} і, отже σ_x, σ_y, τ_{xy} будуть рівномірними і безперервними функціями разом з їх першими і другими частковими похідними в області D, зайнятої пружним тілом, і що $X = X(x,y)$, $Y = Y(x,y)$ — аналітичні функції від x і y в однозв'язній області D_+, яка повністю містить область D. Рівняння (4) можна ще написати у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}(\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}) - \frac{\partial}{\partial z}(\sigma_x + \sigma_y) = X - iY\,, \tag{12}$$

де $\bar{z} = x - iy$ і $\dfrac{\partial}{\partial\bar{z}} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} + i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$ при $z = x + iy$, $\dfrac{\partial}{\partial z} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial x} - i\dfrac{\partial}{\partial y}\right)$.

Рівняння (12) задовольняється тотожно, якщо покладемо

$$\sigma_x + \sigma_y = 4\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial\bar{z}}\,,\ \sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy} = 4\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - M(z,\bar{z})\,. \tag{13}$$

Тут $F(z,\bar{z})$ — аналітична функція від z і $\bar{z}$ в області $(D,\overline{D})$.Вона приймає дійсні значення, і допускає частинні безперервні похідні перших чотирьох порядків, а

$$-M(z,\bar{z}) = \int_0^{\bar{z}}\left[x\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) - iY\left(\frac{z+\bar{z}}{2},\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)\right]d\bar{z} \tag{14}$$

буде аналітичною функцією змінних z і $\bar{z}$ в області $(D_+,\overline{D}_+)$.

Тут через $\overline{D}$ та $\overline{D}_+$ позначені області, симетричні, відповідно, областям D і D_+ відносно дійсної осі. Будемо вважати, що початок координат належить області D.

З (5) і (6) можна вивести співвідношення між складовими напруження σ_x, σ_y, τ_{xy} і складовими переміщення u, V, у вигляді

$$\frac{\partial\overline{U}}{\partial z} = -\frac{1}{4\mu}(\sigma_y - \sigma_x + 2i\tau_{xy}) = -\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{M}{4\mu}, \tag{15}$$

де $U = u + iv$, а $\overline{U} = u - iv$.

$$\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{\partial\overline{U}}{\partial\bar{z}} = \frac{\chi - 1}{4\mu}(\sigma_x + \sigma_y + 2kT) = \frac{\chi - 1}{\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial\bar{z}} + \frac{k(\chi - 1)}{2\mu}T\,, \tag{16}$$

де $\chi = \dfrac{\lambda + 3\mu}{\lambda + \mu}$.

Рівняння сумісності можна отримати шляхом виключення U з рівняння (15). Отримаємо умову

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}-\frac{M}{4\mu}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\frac{1}{\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}-\frac{\overline{M}}{4\mu}\right)+\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar z}\left[\frac{\chi-1}{\mu}\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial\bar z}+\frac{k(\chi-1)}{2\mu}T\right]=0\,, \qquad (17)$$

яку можна записати у вигляді

$$\frac{\partial^4 F}{\partial z^2\partial\bar z^2}+A_1\frac{\partial^3 F}{\partial z\partial\bar z^2}+\overline{A}_1\frac{\partial^3 F}{\partial z^2\partial\bar z}+A_2\frac{\partial^2 F}{\partial\bar z^2}+\overline{A}_2\frac{\partial^2 F}{\partial\bar z^2}+A_3\frac{\partial^2 F}{\partial z\partial\bar z}=f(z,\bar z)\,, \qquad (18)$$

де

$$f(z,\bar z)=\frac{\mu}{\chi+1}\left\{\frac{\partial^2}{\partial\bar z^2}\frac{M}{4\mu}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{\overline{M}}{4\mu}-\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar z}\left(\frac{k(\chi-1)}{2\mu}T\right)\right\}, \qquad (19)$$

$$A_1=\frac{\partial}{\partial z}\ln\frac{\chi+1}{\mu}\,,\; A_2=\frac{\mu}{\chi+1}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\frac{1}{\mu}\,,\; A_3=\frac{\mu}{\chi+1}\frac{\partial^2}{\partial z\partial\bar z}\,.$$

Припустимо, що $A_i(z,\bar z)$ і $f(z,\bar z)$ — аналітичні функції змінних z і $\bar z$, в області $(D,\overline{D})$. Можна довести, що будь-який розв'язок рівняння (18), який допускає частинні похідні перших чотирьох порядків, що безперервні в $(D,\overline{D})$, буде аналітичною функцією змінних z і $\bar z$ в цій області. Звідси випливає, що вищевказана гіпотеза про безперервність в D складових напруження і їх перших і других похідних включає в себе аналітичність в D цих складових, що узагальнює результат Н.І. Мусхелішвіліу випадку однорідних тіл [6].

Зі співвідношень (13) випливає, що напружений стан залежить безпосередньо не від F, а від її частинних похідних другого порядку. Позначаючи, наприклад,

$$2\frac{\partial F(z,\bar z)}{\partial\bar z}\equiv G(z,\bar z)\,, \qquad (20)$$

рівняння (18) можна переписати у вигляді

$$\frac{\partial^3 G}{\partial z^2\partial\bar z}+\mathrm{Re}\left(2A_1\frac{\partial^2 G}{\partial z\partial\bar z}+2A_2\frac{\partial G}{\partial\bar z}+A_3\frac{\partial G}{\partial z}\right)=2f(z,\bar z) \qquad (21)$$

або

$$\frac{\partial^3 G}{\partial z^2\partial\bar z}+\mathrm{Re}\left[\frac{\partial^2(B_1G)}{\partial z\partial\bar z}+\frac{\partial(B_2G)}{\partial z}+\frac{\partial(B_3G)}{\partial\bar z}+B_4G\right]=2f(z,\bar z)\,, \qquad (22)$$

де

$$B_1=2A_1\,,\; B_2=A_3-\frac{\partial A_1}{\partial\bar z}\,,\; B_3=2\left(A_2-\frac{\partial A_1}{\partial z}\right),\; B_4=2\frac{\partial^2 A_1}{\partial z\partial\bar z}-2\frac{\partial A_2}{\partial\bar z}-\frac{\partial A_3}{\partial z}\,. \qquad (23)$$

У позначеннях (20) співвідношення (13) приймуть вид:

$$\sigma_x+\sigma_y=2\frac{\partial G}{\partial z}\,,\; \sigma_y-\sigma_x+2i\tau_{xy}=2\frac{\partial\overline{G}}{\partial z}-M(z,\bar z)\,. \qquad (24)$$

Рівняння (22) можна переписати у вигляді:

$$\frac{\partial^3}{\partial z^2\partial\bar z}[G(z,\bar z)+IG(z,\bar z)-F_0(z,\bar z)]=0,$$

$$F_0(z,\bar z)\equiv 2\int_0^z dz\int_0^z dz\int_0^{\bar z} f(z,\bar z)d\bar z, \qquad (25)$$

$$IG(z,\bar z)\equiv\int_0^z \mathrm{Re}\left[B_1G+\int_0^{\bar z}B_2Gd\bar z+\int_0^z B_3Gdz+\int_0^z dz\int_0^{\bar z}B_4Gd\bar z\right]dz.$$

З (25) отримаємо

$$G(z,\bar z)+IG(z,\bar z)-F_0(z,\bar z)=\varphi(z)+z\overline{\varphi_1(z)}+\overline{\psi(z)}\,, \qquad (26)$$

де $\varphi(z)$, $\varphi_1(z)$ і $\psi(z)$ — довільні функції, які голоморфні до D.

З (19), (20) і (26) випливає, що похідна по z від функції $G(z,\bar{z})+IG(z,\bar{z})-F_0(z,\bar{z})$ буде функцією, що приймає дійсні значення. Приймаючи умову, що похідна по z від функції $\varphi(z)+z\overline{\varphi_1(z)}+\overline{\psi(z)}$ є дійсною функцією, отримаємо $\varphi_1(z)\equiv\varphi'(z)$, і, отже, рівняння (26) можна записати у вигляді

$$G(z,\bar{z})+IG(z,\bar{z})=\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}+F_0(z,\bar{z}). \qquad (27)$$

Нехай тепер C буде межею області D, яка описана рівнянням $t=t(s)$, де $t(s)$ — афікс точки на C, яка відповідає криволінійній абсцисі s, яка виміряна від довільно обраного початку на C. Очевидно, що $t(s+l)=t(s)$ і $t(s_1)\neq t(s_2)$, якщо $0<s_1<s_2<l$, де l — довжина кривої C.

У разі першої основної граничної задачі відомі складові зовнішнього напруження $\sigma_{nx}=\sigma_{nx}(s)$, $\sigma_{ny}=\sigma_{ny}(s)$, що прикладені до контуру C, пов'язані з граничними значеннями напружень σ_x, σ_y, τ_{xy} відомими співвідношеннями виду:

$$\sigma_{nx}+\sigma_x\cos(n,x)+\tau_{xy}\cos(n,x),\ \sigma_{ny}=\tau_{xy}\cos(n,x)+\sigma_y\cos(n,y), \qquad (28)$$

де n — зовнішня нормаль до контуру C.

Позначимо через $f(s)$ або $f(t,\bar{t})$ граничне значення деякої функції $f(z,\bar{z})$, неперервної в $(D,\overline{D})$ при $z\in D$, $z\to C$, $\bar{z}\in\overline{D}$, $\bar{z}\to\overline{C}$, і через $f'(s)$ — похідну від $f(s)$ по s. Тоді, співвідношення (28) можна переписати у вигляді

$$\sigma_{nx}+i\sigma_{ny}=(\sigma_x+i\tau_{xy})y'(s)-(\tau_{xy}+i\sigma_y)x'(s),\ t(s)=x(s)+iy(s). \qquad (29)$$

З (24) отримаємо:

$$\tau_{xy}+i\sigma_y=i\left(\frac{\partial G}{\partial z}+\frac{\partial G}{\partial\bar{z}}\right)-i\overline{M}(\bar{z},z),\ \sigma_x+i\tau_{xy}=\frac{\partial G}{\partial z}-\frac{\partial G}{\partial\bar{z}}+\overline{M}(\bar{z},z).$$

Підставляючи $\tau_{xy}+i\sigma_y$ в (29) і помічаючи, що

$$\frac{\partial G}{\partial z}t'(s)+\frac{\partial G}{\partial\bar{z}}\overline{t'(s)}=\frac{dG}{ds},$$

отримаємо

$$\sigma_{nx}+i\sigma_{ny}=-i\frac{dG}{ds}+i\overline{M(s)}\overline{t'(s)}.$$

Звідси, інтегруючи по s, маємо

$$G(s)=i\int_0^s(\sigma_{nx}+i\sigma_{ny})ds+\int_0^s\overline{M(s)}\overline{t'(s)}ds+c\equiv H(s),\ c=const. \qquad (30)$$

Зі співвідношень (13) випливає, що якщо задані складові напруження, то функція $G(z,\bar{z})$ буде визначена з точністю до постійної. Отже, можна прийняти $c=0$ в рівнянні (30), враховуючи те, що в результаті цього вибору функція $G(z,\bar{z})$ буде цілком визначена напруженим станом.

Розв'язок першої основної граничної задачі зводиться, отже, до визначення розв'язку $G(z,\bar{z})$, що задовольняє рівняння (21) або еквівалентне рівняння (27) і граничні умови (30). Після розв'язкуцієї задачі складові напруження визначаються за допомогою співвідношень (24).

Для вирішення другої основної граничної задачі застосуємо її формулювання в переміщеннях. З огляду на співвідношення (15), рівняння рівноваги (12) можна написати в переміщеннях у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left[\frac{\mu}{\chi-1}\left(\frac{\partial U}{\partial z}+\frac{\partial\overline{U}}{\partial\bar{z}}\right)\right]+\frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\frac{\partial U}{\partial\bar{z}}\right)=P(z,\bar{z}),\ P(z,\bar{z})\equiv\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial\bar{z}}(kT)-\frac{1}{4}(X+iY). \qquad (31)$$

Рівняння (31) можна записати у вигляді

$$\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\left\{\frac{\chi}{\chi-1}\frac{\partial(\mu U)}{\partial z}+\frac{1}{\chi-1}\frac{\partial(\mu\bar{U})}{\partial \bar{z}}-\frac{1}{\chi-1}\frac{\partial\mu}{\partial z}U-\frac{1}{\chi-1}\frac{\partial\mu}{\partial \bar{z}}\bar{U}-\int_0^{\bar{z}}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\mu}{\partial \bar{z}}U\right)+P(z,\bar{z})\right]d\bar{z}\right\}=0 .$$

Звідси випливає

$$\frac{\chi}{\chi-1}\frac{\partial(\mu U)}{\partial z}+\frac{1}{\chi-1}\frac{\partial(\mu\bar{U})}{\partial \bar{z}}-\frac{1}{\chi-1}\frac{\partial\mu}{\partial z}U-\frac{1}{\chi-1}\frac{\partial\mu}{\partial \bar{z}}\bar{U}-\int_0^{\bar{z}}\left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\mu}{\partial \bar{z}}U\right)+P(z,\bar{z})\right]d\bar{z}=\varphi'(z), \tag{32}$$

де $\varphi(x)$ — довільна,голоморфна в D, функція. Виключаючи $\partial(\mu\bar{U})/\partial\bar{z}$ з рівняння (32) і його комплексно-сполученого рівняння, можна отримати

$$(\chi+1)\mu U(z,\bar{z})+JU(z,\bar{z})=\chi\varphi(z)-\overline{z\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)}-\int_0^z\frac{\partial\chi}{\partial z}\varphi(z)\partial z+P_0(z,\bar{z}), \tag{33}$$

$$P_0(z,\bar{z})\equiv\int_0^z\left[\chi\int_0^{\bar{z}}P(z,\bar{z})d\bar{z}-\int_0^z\bar{P}(\bar{z},z)dz\right]dz ,$$

$$JU(z,\bar{z})=-\int_0^z\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial z}+\mu\frac{\partial\chi}{\partial z}\right)U+\frac{\partial\mu}{\partial\bar{z}}\bar{U}+\chi\int_0^{\bar{z}}\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\mu}{\partial\bar{z}}U\right)d\bar{z}-\int_0^z\frac{\partial}{\partial\bar{z}}\left(\frac{\partial\mu}{\partial z}\bar{U}\right)dz\right]dz , \tag{34}$$

де $\psi(z)$ — довільна функція, якаголоморфна в D.

Розв'язок другої основної граничної задачі зводиться, отже, до розв'язку рівняння (31) або еквівалентного рівняння (33), що приймає задані значення на границі, тобто такого,що задовольняє співвідношенню $U(s)=u(s)+iv(s)$, де $u(s)$ і $v(s)$ — складові пружного переміщення, які задані на C.

Застосування конформного перетворення. Припустимо тепер, що шляхом конформного перетворення $z=\omega(\zeta)$ однозв'язна область D з границею C в площині $z=x+iy$ перетворюється в коло Ξ з границею Γ, що описується рівнянням $|\zeta|=1$ в площині $\zeta=\xi+i\eta$, а $\omega(0)=0$.

Функція $\omega(\zeta)$ буде голоморфною в D, тому

$$\frac{\partial}{\partial z}=\frac{1}{\omega'(\zeta)}\frac{\partial}{\partial\zeta},\ \frac{\partial}{\partial\bar{z}}=\frac{1}{\overline{\omega'(\zeta)}}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}},\ dz=\omega'(\zeta)d\zeta,\ d\bar{z}=\overline{\omega'(\zeta)}d\bar{\zeta} . \tag{35}$$

Отже, співвідношення (27) і (25) набувають виду

$$G^\circ(\zeta,\bar{\zeta})+J^\circ G^\circ(\zeta,\bar{\zeta})=\varphi(\zeta)+\frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\overline{\varphi'(\zeta)}+\overline{\psi(\zeta)}+F_0^\circ(\zeta,\bar{\zeta}), \tag{36}$$

$$J^\circ G^\circ(\zeta,\bar{\zeta})=\int_0^\zeta\omega'(\zeta)\mathrm{Re}\left[B_1^\circ G^\circ+\int_0^{\bar{\zeta}}\overline{\omega'(\zeta)}B_2^\circ G^\circ d\bar{\zeta}+\int_0^\zeta\omega(\zeta)B_3^\circ G^\circ d\zeta+\int_0^\zeta\omega'(\zeta)d\zeta\int_0^{\bar{\zeta}}\overline{\omega'(\zeta)}B_4^\circ G^\circ d\bar{\zeta}\right]d\zeta , \tag{37}$$

$$F_0^\circ(\zeta,\bar{\zeta})=2\int_0^\zeta\omega'(\zeta)d\zeta\int_0^\zeta\omega'(\zeta)d\zeta\int_0^{\bar{\zeta}}\overline{\omega'(\zeta)}f[\omega(\zeta),\overline{\omega(\zeta)}]d\bar{\zeta} , \tag{38}$$

де $\varphi(\zeta)$, $\psi(\zeta)$ — довільні функції, що голоморфні в Ξ, а

$$G^\circ(\bar{\zeta},\zeta)\equiv G[\omega(\zeta),\overline{\omega(\zeta)}],\ B_i^\circ(\zeta,\bar{\zeta})\equiv B_i[\omega(\zeta),\overline{\omega(\zeta)}]\ \ (i=1,2,3,4). \tag{39}$$

В перетвореній області гранична умова (30) набуває вигляду

$$G^\circ(\sigma)=\Phi^\circ(\sigma) . \tag{40}$$

Тут через $\sigma = e^{i\theta}$ позначена криволінійна абсциса на колі Γ, а функція $\Phi^{\circ}(\sigma)$ визначається однозначно за $\Phi(s)$, оскільки між афіксами t і τ контурів C і Γ існує взаємно-однозначна відповідність $t = \omega(\tau)$.

Підставляючи тепер (35) в (33) і (34), отримаємо:

$$(\chi+1)\mu U^{\circ}(\zeta,\bar{\zeta}) + J^{\circ}U^{\circ}(\zeta,\bar{\zeta}) = \chi\varphi(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\overline{\varphi'(\zeta)} - \overline{\psi(\zeta)} - \int_0^{\zeta}\omega'(\zeta)\frac{\partial\chi}{\partial\zeta}\omega(\zeta)d\zeta + P_0^{\circ}(\zeta,\bar{\zeta}), \quad (41)$$

$$J^{\circ}U^{\circ}(\zeta,\bar{\zeta}) = -\int_0^{\zeta}\left[\left(\frac{\partial\mu}{\partial\zeta} + \mu\frac{\partial\chi}{\partial\zeta}\right)U^{\circ} + \frac{\omega'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\frac{\partial\mu}{\partial\zeta}\overline{U}^{\circ} + \chi\int_0^{\bar{\zeta}}\frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\partial\mu}{\partial\bar{\zeta}}U^{\circ}\right)d\bar{\zeta} - \frac{\omega'(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\int_0^{\zeta}\frac{\partial}{\partial\bar{\zeta}}\left(\frac{\partial\mu}{\partial\zeta}\overline{U}^{\circ}\right)d\zeta\right]d\zeta. \quad (42)$$

В перетвореній області гранична умова (35) буде мати вигляд

$$U^{\circ}(\sigma) = u^{\circ}(\sigma) + iv^{\circ}(\sigma),$$

де $u^{\circ}(\sigma)$ і $v^{\circ}(\sigma)$ визначаються однозначно з $u(s)$ та $v(s)$.

Спосіб послідовних наближень. Для розв'язання граничних задач в разі неоднорідних тіл використовуємо спосіб послідовних наближень, вважаючи, що перше наближення відповідає тілу, на яке діють тісамі навантаження, але яке вважається однорідним, а наступні ітерації вводять поправки на неоднорідність. Розв'язання першої основної граничної задачі можна побудувати, виходячи з рівнянь (36), (40), за схемою

$$G^{\circ}(\zeta,\bar{\zeta}) = \sum_{n=1}^{\infty} G_n^{\bullet}(\zeta,\bar{\zeta}), \quad (43)$$

$$G_1^{\circ}(\zeta,\bar{\zeta}) = \varphi_1(\zeta) + \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\overline{\varphi'(\zeta)} + \overline{\psi(\zeta)} + F_0^{\circ}(\zeta,\bar{\zeta}), \quad (44)$$

$$G_n^{\circ}(\zeta,\bar{\zeta}) = \varphi_n(\zeta) + \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\overline{\varphi_n'(\zeta)} + \overline{\psi_n(\zeta)} - I^{\circ}G_{n-1}^{\bullet}(\zeta,\bar{\zeta}) \ (n \ge 2), \quad (45)$$

де $\varphi_n(\zeta)$ і $\psi_n(\zeta)$ $(n \ge 1)$ — голоморфні в Ξ функції, що визначаються з граничних умов виду

$$\varphi_1(\tau) + \frac{\omega(\tau)}{\omega'(\tau)}\overline{\varphi_1'(\tau)} + \overline{\psi_1(\tau)} = \Phi^{\circ}(\tau) - F_0^{\circ}(\tau,\bar{\tau}), \quad (46)$$

$$\varphi_n(\tau) + \frac{\omega(\tau)}{\omega'(\tau)}\overline{\varphi_n'(\tau)} + \overline{\psi_n(\tau)} = J^{\circ}G_{n-1}^{\circ}(\tau,\bar{\tau}). \quad (47)$$

Як видно з попередніх міркувань, анулювання адитивної постійної в граничній умові (30), відповідно (40), повністю визначає $G^{\bullet}(\zeta,\bar{\zeta})$ через напружений стан. Однак при цьому функції $\varphi(\zeta)$ і $\psi(\zeta)$ не виходять цілком визначеними з (36), і на них можна накласти додаткові умови [6]

$$\varphi(0) = 0, \ \operatorname{Im}\varphi'(0) = 0.$$

Отже, в даній схемі розв'язку можна прийняти

$$\varphi_n(0) = 0, \ \operatorname{Im}\varphi_n'(0) = 0 \ (n \ge 1).$$

Розв'язок послідовних граничних задач (46) і (47) можна здійснити методами, застосовуваними в теорії пружності для однорідних тіл: метод розкладання в ступеневі ряди, інтегральні методи і т.п.

Збіжність ряду (43) залежить від умов, що накладаються на функції $\Phi^{\circ}(\tau)$, $F_0^{\circ}(\xi,\bar{\xi})$ і $\omega(\zeta)$, а також від змін функцій, які вводять неоднорідність тіла.

Розв'язок другої основної граничної задачі можна побудувати, виходячи з умов (41) і (42), за схемою:

$$U^{\circ}(\zeta,\bar{\zeta}) = \sum_{n=1}^{\infty} U_n^{\circ}(\zeta,\bar{\zeta}), \tag{48}$$

$$(\chi+1)\mu U_1^{\circ}(\zeta,\bar{\zeta}) = \chi\varphi_1(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\overline{\varphi_1'(\zeta)} - \overline{\psi_1(\zeta)} - \int_0^{\zeta}\omega'(\zeta)\frac{\partial\chi}{\partial\zeta}\varphi_1(\zeta)d\zeta + P_0^{\circ}(\zeta,\bar{\zeta}), \quad 49)$$

$$(\chi+1)\mu U_n^{\circ}(\zeta,\bar{\zeta}) = \chi\varphi_n(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\overline{\varphi_n'(\zeta)} - \overline{\psi_n(\zeta)} - \int_0^{\zeta}\omega'(\zeta)\frac{\partial\chi}{\partial\zeta}\varphi_n(\zeta)d\zeta - J^{\circ}U_{n-1}^{\circ}(\zeta,\bar{\zeta}) \ (n \ge 2), \tag{50}$$

де $\varphi_n(\zeta)$ і $\psi_n(\zeta)$ ($n \ge 1$) — голоморфні в Ξ функції, що визначаються з граничних умов

$$\chi\varphi_1(\tau) - \frac{\omega(\tau)}{\omega'(\tau)}\overline{\varphi_1'(\tau)} - \overline{\psi_1(\tau)} - \int_0^{\tau}\omega'(\zeta)\frac{\partial\chi}{\partial\zeta}\varphi_1(\zeta)d\zeta = (\chi+1)\mu[u(\tau)+iv(\tau)] - P_0^{\circ}(\tau,\bar{\tau}), \tag{51}$$

$$\chi\varphi_n(\tau) - \frac{\omega(\tau)}{\omega'(\tau)}\overline{\varphi_n'(\tau)} - \overline{\psi_n(\tau)} - \int_0^{\tau}\omega'(\zeta)\frac{\partial\chi}{\partial\zeta}\varphi_n(\zeta)d\zeta = J^{\circ}U_{n-1}^{\circ}(\tau,\bar{\tau}) \ (n \ge 2). \tag{52}$$

Як видно з (41), якщо задати $U^{\circ}(\tau,\bar{\tau})$, то функції $\varphi(\zeta)$ і $\psi(\zeta)$ не визначаються однозначно. Можна прийняти $\varphi(0) = 0$, причому ця умова повністю визначає $\varphi(\zeta)$ і $\psi(\zeta)$ за допомогою $U^{\circ}(\zeta,\bar{\zeta})$. Отже, в даній схемі розв'язку можна прийняти

$$\varphi_n(0) = 0 \ (n \ge 1), \tag{53}$$

причому функції $\varphi_n(\zeta)$ і $\psi_n(\zeta)$ виходять цілком визначеними.

Граничні задачі (51) і (52) відрізняються від тих, що зустрічаються в теорії пружності для однорідних тіл присутністю інтегрального члена. При прийнятті часто застосовуваної гіпотези $\chi = \chi_0 = const$, яку можна прийняти в першому наближенні для будь-якого неоднорідного тіла, оскільки χ залежить тільки від коефіцієнта Пуассона, що змінюється у вузьких межах для всіх відомих матеріалів, співвідношення (50)—(53) приймуть вид

$$(\chi_0+1)\mu U_1^{\circ}(\zeta,\bar{\zeta}) = \chi_0\varphi_1(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\overline{\varphi_1'(\zeta)} - \overline{\psi_1(\zeta)} + P_0^{\circ}(\zeta,\bar{\zeta}), \tag{54}$$

$$(\chi_0+1)\mu U_n^{\circ}(\zeta,\bar{\zeta}) = \chi_0\varphi_n(\zeta) - \frac{\omega(\zeta)}{\omega'(\zeta)}\overline{\varphi_n'(\zeta)} - \overline{\psi_n(\zeta)} - J^{\circ}U_{n-1}^{\bullet}(\zeta,\bar{\zeta}) \ (n \ge 2), \tag{55}$$

$$\chi_0\varphi_1(\tau) - \frac{\omega(\tau)}{\omega'(\tau)}\overline{\varphi_1'(\tau)} - \overline{\psi_1(\tau)} = (\chi_0+1)\mu[u(\tau)+iv(\tau)] - P_0^{\circ}(\tau,\bar{\tau}), \tag{56}$$

$$\chi_0\varphi_n(\tau) - \frac{\omega(\tau)}{\omega'(\tau)}\overline{\varphi_n'(\tau)} - \overline{\psi_n(\tau)} = J^{\circ}U_{n-1}^{\bullet}(\tau,\bar{\tau}) \ (n \ge 2) \tag{57}$$

і розв'язок послідовних граничних задач (52) і (53) можна здійснити способами, які застосовуються в теорії пружності для однорідних тіл.

Висновки

Таким чином, в найбільш загальному випадку квазістатичну задачу теорії в'язкопружності, при наявності стаціонарного термічного поля, можна звести формально за допомогою перетворення Лапласа до пружно-статичної задачі для неоднорідного тіла, причому останню можна розв'язати також зазначеним у роботі методом.

Необхідно відмітити, що отримання розв'язку в'язко-пружної задачі вимагає виконання зворотного перетворення, що пов'язано з досить великими обчислювальними труднощами, а отримання розв'язку для областей з неоднорідністю загального вигляду потребує визначення розв'язку, що відповідає тим самим областям в однорідному середовищі.

Список використаної літератури

1. Freudenthal A. The mathematical theories of the inelastic continuum/ A. Freudenthal, H. Geiringer // Encyclopedia of Physics. – Springer, –2005. – Vol. 6. – pp. 15–22.
2. Nowinsкі J. Studium nad stanami naprzenia w cialachs przystych niejendorodnych / J.Nowinsкі, S.Tursкі // Arch. Mech. Stos. – 2000. –Vol. 5. – No 3. – pp. 54–63.
3. Teodorescu P. Über das ebene Problem nichthomogener elastischer Körper / P. Teodorescu, M. Predeleanu // Actatech. Acad. Sei. Hung. – 1995. – Vol. 27. – No 3. – pp. 95–103.
4. Sherman D.I. On the problem of plane strain innon-homogeneous media. Nonhomogeneity in Elasticity and Plasticity // D.I. Sherman –London: PergamonPress, 1995. – 354 p.
5. Milieu M. Asupra ieprezentärii vectorului asociat cuasistatici dinamic ai echilibrului mediilor continue neomogene, cu proprietati reologice cuasiliniare / M. Milieu // Comun. Acad. – R.P.R. – 1996. – Vol. 12. – No 8. – pp. 13–24.
6. Misicu M. Asupra problem eiaxial-simetricesi a problem eiplane a teoriei elasticitatii pentru corpuri izotrope neomogene / M.Misicu, C. Teodosiu //Com. Acad. – R.P.R. – 1992. – Vol. 12. – No 8. – pp. 354–362.
7. Мусхелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили. – М.: Изд-во Акад. наук, 1954. – 709 с.
8. Gurtin M., Sternberg E. On the linear theory of viscoelasticity / M. Gurtin, E. Sternberg//Arch. Rational Mech. Annal. – 1962. –Vol. 11. –No 4. – pp. 156–162.

РОЗВ’ЯЗОК СТАТИЧНОЇ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ НЕОДНОРІДНИХ ІЗОТРОПНИХ ТІЛ

Kalinin E.I., Polyashenko S.O.

Abstract

It is known that operators that determine the constituent laws for visco-elastic materials contain parameters that are very sensitive to changes in temperature. In the case of an inhomogeneous thermal field, these parameters depend on spatial coordinates. The influence of this inductive heterogeneity on the distribution of stresses caused by external forces is much longer and longer than the effect of stresses caused by the most thermal field. Neglecting this effect, even in the simplest cases, leads to physically inappropriate solutions.

A series of works is devoted to the study of the plane problem of inhomogeneous elastic bodies. Some of these works derive from the simplifying hypothesis of modifying one modulus of elasticity, assuming that the Poisson constant is constant. Another considers the case of bodies consisting of the union of disjunctive homogeneous elastic regions. Were proposed formulas for the complex mapping of stresses and displacements that are valid for elastic and visco-elastic bodies with continuous uniformity of the general form in a plane and axisymmetric case. In this paper, the method of solving the static plane problem of the theory of elasticity for non-homogeneous bodies is described by successive approximations based on the use of reflections of the Kolosov type, Muschelishvili and conformal transformations.

The aim of the work is to construct a quasistatic problem of visco-elasticity theory in the presence of a stationary thermal field to an elastic-static problem for a non-uniform body using Laplace transform methods.

It is established that in the most general case, the quasistatic problem of visco-elasticity theory, in the presence of a stationary thermal field, can be formally reduced by means of Laplace's transformation into an elastic-static problem for a nonhomogeneous body, and the latter can be solved also by the method indicated in the work.

It is noted that obtaining a solution of a visco-elastic problem requires the implementation of a reverse transformation, which is associated with rather large computational difficulties, and obtaining

a solution for areas with heterogeneity of general appearance requires the definition of a solution that corresponds to the same areas in a homogeneous environment.

References

[1] Freudenthal A., H. Geiringer "The mathematical theories of the inelastic continuum" Encyclopedia of Physics.Springer, Vol. 6. pp. 15–22., 2005 *(references)*

[2] Nowinsкi J., Turski S. "Studium nad stanami naprzenia w cialach sprzystych niejendorodnych" Arch. Mech. Stos. Vol. 5. No 3. pp. 54–63. 2000 *(references)*

[3] Teodorescu P., Predeleanu M. "Über das ebene Problem nichthomogener elastischer Körper" Acta tech. Acad. Sei. Hung. Vol. 27. No 3. pp. 95–103. 1995 *(references)*

[4] Sherman D.I. On the problem of plane strain in non-homogeneous media. Nonhomogeneity in Elasticity and Plasticity, London: Pergamon Press, 1995, 354 p.

[5] Milieu M. "Asupra ieprezentärii vectorului asociat cuasistatici dinamic ai echilibrului mediilor continue neomogene, cu proprietati reologice cuasiliniare" Comun. Acad. R.P.R. Vol. 12. No 8. pp. 13–24. 1996 *(references)*

[6] Misicu M., Teodosiu C. "Asupra problemei axial-simetrice si a problemei plane a teoriei elasticitatii pentru corpuri izotrope neomogene" Com. Acad. R.P.R. Vol. 12. No 8. pp. 354-362. 1992 *(references)*

[7] Mushelishvili N.I. *Nekotorie osnovnie zadachi matematicheskoj teorii uprugosti* [Some basic problems in the mathematical theory of elasticity]. Moskva, 1954. 709 p.

[8] M. Gurtin, E. Sternberg "On the linear theory of viscoelasticity" Arch. Rational Mech. Annal. Vol. 11. No 4. pp. 156-162. 1962 *(references)*