МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ПРИРОДНИЧИХ НАУКАХ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

DOI:
УДК 519.6:519.642:550.831.017
П.С. Смолянський, к.т.н., доцент, sirius.ps@gmail.com
А.В. Козіков, старший викладач, kozikov.av@gmail.com
О.В. Шамрай, к.т.н., доцент, elenashamdv@gmail.com
Криворізький національний університет, м. Кривий Ріг

МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ ПРОЦЕСУ ПОШУКУ ЛОКАЛЬНИХ ПОРОЖНИН ДЛЯ БІНАРНОГО СЕРЕДОВИЩА В ТРИВИМІРНОМУ ВИПАДКУ

В статті розглянуті проблеми створення адекватної математичної моделі пошуку одиничної порожнини в ізольованій області на основі загального рівняння гравіметрії. Авторами запропонований метод вирішення спрощених тривимірних інтегральних рівнянь гравіметрії та зручні аналітичні формули для обчислення коефіцієнтів СЛАР в разі кусково-постійної апроксимації функції щільності середовища та вибору елементів дискретизації у вигляді прямокутних паралелепіпедів.
***Ключові слова**: локалізація пустот; зворотна задача; інтегральні рівняння; апроксимація; чисельне моделювання.*

In the article the problems of creating an adequate mathematical model for finding a unit cavity in an isolated region are considered on the basis of the general equation of gravimetry. The authors propose a method of solving simplified three-dimensional integral gravimetric equations and offer convenient analytical formulas for calculating SLR coefficients in the case of piecewise constant approximation of the density function of the medium and the selection of discrete elements in the form of rectangular parallelepipeds.
***Keywords**: void localization; inverse problem; integral equations; approximation; numerical simulation.*

Постановка проблеми

Як відомо, пустоти виникають по всьому світу і несуть велику потенційну загрозу. Так, наприклад, 13 червня 2010 року, під час планових підривних робіт на шахті ім. Орджонікідзе Центрального ГЗК в м. Кривий Ріг стався обвал ґрунту на площі 16,5 га, при цьому загинула одна людина. У зону обвалу потрапила частина автодороги.

Другий приклад — 17 серпня 2010 року у дворі торгового комплексу «Міраж Плюс» по вул. Урицького м. Кривий Ріг утворилася воронка діаметром 18 м, в яку провалилися близько 20 контейнерів з товаром.

Особливу небезпеку, за оцінкою фахівців, становлять ділянки гірничих відводів шахт, закритих в першій половині XX століття, оскільки видобуток руди в той час проводився на незначній глибині (20—300 м), а технічна документація була частково втрачена під час війни. Але навіть якщо положення порожнин відомо, то для їх моніторингу використовується застаріла звукометрична апаратура. Результати не аналізуються кількісно, а тільки реєструється персоналом і оцінюються якісно.

На даний момент реально не існує ефективних систем виявлення і оцінки геометрії та глибини залягання порожнин в земній корі навіть для пустот на невеликих глибинах та які мають значний об'єм. Таким чином, досить актуальним є питання про вибір шляхів для створення сучасного комплексу апаратних і програмних засобів, призначених для пошуку таких пустот.

Як відомо, завдання подібного роду відносяться до теорії зворотних некоректних задач, теорія яких активно розвивається в даний час [1—4]. Зворотними задачами називають задачі відновлення структури об'єктів за непрямими даними. Такі задачі виникають в тих випадках, коли внутрішня будова фізичного об'єкта є недоступною для прямого дослідження, в той час як непряма інформація про структуру об'єкта може бути отримана у вигляді вимірюваних фізичних полів, власних або ж тих, що представляють собою відгук об'єкта на заданий зовнішній вплив.

Для вирішення таких задач будемо використовувати гравітаційні поля, бо вони є найбільш поширеними, вивченими і доступними в геофізиці на даний час. Отже, надалі в якості основних геофізичних полів будуть розглянуті тільки гравітаційні поля.

Формулювання мети дослідження

Метою даної роботи є створення адекватної математичної моделі пошуку одиничної порожнини в ізольованій області на основі загального рівняння гравіметрії та розробка ефективних методів розв’язування задач такого типу.

Аналіз попередніх досліджень і публікацій

В роботі досліджені методи розв'язання задачі пошуку локальних тривимірних порожнин за допомогою методів гравіметрії. Стаття присвячена теоретичним підходам до вирішення задач визначення локальних порожнин і з'ясування критичних моментів для вирішення цього завдання.

Як відомо, рішення задачі гравіметрії [3] в найбільш повній постановці призводить до тривимірних інтегральних рівнянь першого роду відносно невідомої щільності просторово розподілених джерел гравітаційного поля. У загальному випадку потрібно визначити невідомий розподіл щільності у всій тривимірній області. Для цього слід вирішити інтегральне рівняння першого роду:

$$G\int_D (z-z_J)\rho(x,y,z)/R^3 dV = F_z(x_J, y_J, z_J), \tag{1}$$

де — G гравітаційна стала, $\rho(x,y,z)$ — об'ємна щільність середовища, R — відстань між поточною точкою об`єму D та точкою спостереження $M_J(x_J, y_J, z_J)$, $J = 1, K$, де K — загальна кількість спостережень, D — досліджувана область, в якій локалізовані можливі джерела гравітаційних аномалій — пустоти, T — область спостереження, яка звичайно, знаходиться на поверхні Землі.

Зауважимо, що множина точок спостереження T лежить поза областю інтегрування, і тому інтеграл в (1) є власним. Через F_z позначена вертикальна проекція сили тяжіння в точці спостереження $M_J(x_J, y_J, z_J)$ від усієї області D. Також задане значення абсолютної похибки вимірювань гравітаційного поля та усереднена щільність середовища в області D, яка може містити пустоти. Але така загальна постановка задачі є надмірно складною для сучасної обчислювальної техніки і потребує подальшого спрощення [3,4].

Тому доцільно від загальної постановки задачі гравіметрії (1) перейти до більш простого рівняння, не втративши при цьому його змістовну частину. Адаптація рівняння (1) до конкретних умов задачі є першим і необхідним етапом для побудови працездатної математичної моделі та її чисельної реалізації.

Виклад основного матеріалу

Отже, потрібно за заданими координатами точок спостереження $M_J(x_J, y_J, z_J)$ і результатами вимірів вертикальної проекції сили тяжіння F_z в точках спостереження визначити: чи є порожнина в заданій області D, а також її приблизну конфігурацію. Під конфігурацією пустот мається на увазі їх приблизне положення в просторі, форма та геометричні розміри. Таке питання актуальне як для простого рельєфу місцевості на поверхні Землі — горизонтальній площині, так і для ускладненого рельєфу, який може містити, наприклад, природні та техногенні пустоти, але вже з відомими координатами і відомої геометрією, великими будовами і т.д. У статті розглянуто в якості базового випадку простий рельєф на поверхні Землі і відсутність відомих прилеглих порожнин значного об`єму, які можуть «екранувати» існування розшукуваних аномалій. Також будемо вважати, що пустоти рідко розташовані і в заданій області D є тільки одна локальна порожнина.

Однак і в такій постановці задача визначення пустот являє до певної міри проблему, яка не може бути вирішена ні аналітично, ні чисельно [3,4], і рівняння (1) потребує подальшого спрощення. Для цього розглянемо дискретизацію інтегрального рівняння (1) в загальному випадку. Дискретизуємо область на множину скінчених елементів (СЕ), $D = \bigcup_{i=1}^{n} D_i$. Елементи D_i можуть перетинатися або по спільній грані, або мати тільки спільні ребра, або вершини, або не мати спільних точок взагалі. Таким чином, об`єм перетину цих елементів завжди дорівнює нулю, тобто $mes(D_i \bigcap D_j) = 0$, якщо $i \neq j$. СЕ D_i вважатимемо надалі многогранниками. У межах кожного СЕ D_i об'ємну щільність середовища ρ_i вважатимемо величиною постійною. Тому кожен СЕ D_i може належати тільки до порожнини або до суцільного середовища, але завжди повністю належить тільки одному з цих двох середовищ. Таке середовище називається кусково-постійним і є розрахунковою абстракцією. Розглянемо, як можна спростити інтегральний оператор (1) для кусково-постійного середовища. Для цього скористаємося інтегральними теоремами векторного аналізу [5].

Запишемо узагальнений дискретизований інтегральний оператор рівняння (1) у вигляді

$$P(\rho, D, T) = \sum_{i=1}^{N} \iiint_{D_i} \rho(x, y, z) \overline{R} / R^3 dV, \tag{2}$$

де $\rho(x, y, z)$ — функція щільності, N — загальне число СЕ. З метою узагальнення в операторі (2) розглянуті три компоненти вектора, а не одна, як в (1). Позначимо:

$$\bar{I}_S = \sum_{i=1}^{N} \iiint_{D_i} \rho \nabla (1/R) dV, \quad \bar{I}_V = \sum_{i=1}^{N} \iiint_{D_i} \nabla \rho / R dV.$$

Можна показати [5], що

$$P(\rho, D, T) = \bar{I}_S - \bar{I}_V. \tag{3}$$

Формула (3) справедлива для довільного середовища, але для кусково-постійного середовища вона може бути істотно спрощена. Для такого середовища інтеграл $\bar{I}_V$ дорівнює нулю, так як $\nabla \rho = 0$ в кожному елементі D_i. Далі, перетворимо інтеграл $\bar{I}_S$, для кусково-постійного середовища він теж зазнає суттєвого спрощення. В силу теореми про дивергенцію [5]:

$$\bar{I}_S = \sum_{i=1}^{N} \iiint_{D_i} \nabla (\rho / R) dV = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \iint_{S_i} \overline{n}_i / R dS. \tag{4}$$

Тепер стають виправданими індекси у першого та другого інтеграла. Перший інтеграл — це гравітаційне поле від поверхневих джерел поля, другий — від об'ємних.

Однак і (4) можна істотно спростити при природних припущеннях. За умовою дискретизації елемент D_i — багатогранник. Будемо вважати область D і всі СЕ D_i — прямокутними паралелепіпедами зі сторонами паралельними осям координат, що не звужує можливостей нашої моделі. В цьому випадку вектори нормалі $\overline{n}_i$ — постійні вектори, і їх можна винести з-під знаку поверхневого інтеграла в (4). Тоді

$$\bar{I}_S = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \iint_{S_i} \overline{n}_i / R dS = \sum_{i=1}^{N} \rho_i \bar{I}_{Si}.$$

У свою чергу:

$$\bar{I}_{Si} = \sum_{j=1}^{M} \bar{n}_{ij} \bar{I}_{ij} \ . \qquad (5)$$

В (5) виконаний перехід до інтеграла по кожній грані. Число граней в окремому випадку постійне та для кожного СЕ D_i дорівнює 6. Інтеграл $\bar{I}_{ij}$ — це інтеграл від грані j СЕ D_i з номером i. У вектора (5) три складові. Але в гравіметрії вимірюється та використовується тільки вертикальна складова сили тяжіння — F_z. Тому далі будемо розглядати тільки z-складову суми інтегралів: $I_z = \sum_{i=1}^{N} I_{zi}$. Очевидно, що

$$I_{zi} = I_{z2i} - I_{z1i}, \qquad (6)$$

де

$$I_{z2i} = \rho_i \iint_{S_{2i}} 1/R dS\,, \quad I_{z1i} = \rho_i \iint_{S_{1i}} 1/R dS.$$

Тут S_{2i}, S_{1i} — верхня та нижня грані СЕ D_i, що паралельні площині Oxy, z_{i2}, z_{i1} — постійні координати граней S_{2i}, S_{1i}. Знак мінус з'явився в (6) тому, що зовнішня нормаль S_{1i} та Oz вісь спрямовані в протилежні сторони.

Алгоритм розрахунку коефіцієнтів систем лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) для дискретизованого рівняння. Для швидкого та ефективного обчислення I_{zi} в разі, коли СЕ D_i — прямокутний паралелепіпед зі сторонами, паралельними осям координат, можна аналітично взяти поверхневий інтеграл виду

$$I = \iint_{S} dS / R. \qquad (7)$$

Це потрібно зробити тільки по двох гранях з шести. Тут S — прямокутник зі сторонами, що паралельні осям Ox, Oy, площина S перпендикулярна осі Oz, R — відстань між поточною точкою та точкою спостереження, $M_J(x_J, y_J, z_J)$, де $M_J \in T$.

Інтеграл (7) може бути обчислений в аналітичному вигляді в елементарних функціях для прямокутної області S. По верхній грані об`єму він дорівнює: $I_{z2i} = V_{22} - V_{21}$, де $V_{22} = F(x_2', y_2', z_2') - F(x_2', y_1', z_2')$, $V_{21} = F(x_1', y_2', z_2') - F(x_1', y_1', z_2')$.

Тут $x_2' = x_2 - x_J, x_1' = x_1 - x_J$, $y_2' = y_2 - y_J, y_1' = y_1 - y_J$, $z_2' = z_2 - z_J, z_1' = z_1 - z_J$.

Аналогічно інтеграл (7) по нижній основі об`єму D_i рівний:

$I_{z1i} = V_{12} - V_{11}$, де $V_{12} = F(x_2', y_2', z_1') - F(x_2', y_1', z_1')$, $V_{11} = F(x_1', y_2', z_1') - F(x_1', y_1', z_1')$.

Тут позначено:

$$F(u, v, w) = u \cdot L(v + R) + v \cdot Ln(u + R) - w \cdot Acttg\,(u \cdot v /(w \cdot R)), \qquad (8)$$

де $R = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$.

Формула (8) є багатовимірним узагальненням формули Ньютона-Лейбніца. Значенням інтеграла (7) є лінійна комбінація значень формули (8) в вершинах об'ємів D_i.

Як відомо [1—4], дискретизація інтегральних рівнянь першого роду призводить до погано обумовлених СЛАР. Для їх вирішення використовується складна процедура регуляризації СЛАР, яка не завжди ефективна. Не заперечуючи значення регуляризації для вирішення погано обумовлених СЛАР, автори пропонують інший, більш простий і більш природний шлях вирішення основної проблеми, поставленої в статті. Цей спосіб не є універсальним і не є альтернативою регуляризації, але дозволяє отримувати достовірні результати в деяких випадках.

В якості подальшого спрощення розглянемо бінарне середовище, що являє частковий випадок кусково-постійного. Воно може мати тільки два можливих значення щільності: 0 для порожнини і постійну середню щільність ρ_0 для всієї області D, крім пустот. Як правило, величина середньої щільності відома з високою точністю з геологічних міркувань і вона маловаріативна для великих об'ємів. Але навіть в такій гранично спрощеній постановці вирішити дискретизоване інтегральне рівняння (1) для великого числа СЕ на сучасних ЕОМ складно.

Суть запропонованого методу для подолання описаних труднощів зводиться до дискретизації області D, на відносно невелику кількість СЕ з постійною щільністю, в формуванні та багаторазовому вирішенні відповідної СЛАР щодо щільності. Коефіцієнти СЛАР будуть розраховані за формулами (8). Зауважимо, що невелика кількість блоків призведе до відносно невеликого числа обумовленості СЛАР. Кількість таких блоків позначимо через P.

Будемо вважати, що в нашому розпорядженні є велика кількість точок спостереження, в яких відома величина F_z — вертикальна проекція сили тяжіння від області D. В крайньому разі ці дані можна отримати за допомогою процедури інтерполяції та згладжування.

Змінюючи точки спостереження за допомогою випадкового вибору, можна отримати множину векторів-рішень, фізичний зміст яких — щільність відповідних СЕ блоків D_i. Таким чином, будемо працювати не з одним значенням щільності для фіксованого СЕ, а з кількома. Отже, розбиття області D на СЕ буде постійним на протязі всього процесу рішення спрощеного рівняння, а точки спостереження будуть змінюватися.

Внаслідок помилок вимірювань і поганої обумовленості СЛАР розв’язання — щільність СЕ D_i буде відрізнятися від «стандартних» значень (ρ_0 та 0). Але можна спробувати для деяких блоків встановити, до якого середовищі найбільш ймовірно відноситься блок — суцільної породи щільності ρ_0 чи області пустот щільності 0. Таким чином, в разі не дуже великого числа елементів дискретизації P ефективним виявляється адаптивний алгоритм, який визначає щільності блоків послідовно, намагаючись розпізнати належність СЕ D_i до області пустот чи суцільного середовища хоча б деяких блоків D_i. Потім ідентифіковані блоки вилучаються з розгляду, їх вплив не враховується на наступних кроках алгоритму. Такий метод природно назвати методом «вичерпання», суть якого полягає в послідовному розпізнаванні для СЕ D_i типу середовища: однорідне чи область пустот.

Запропонований алгоритм вирішення спрощеної оберненої задачі гравірозвідки складається з етапу ініціалізації, зовнішніх та внутрішніх ітерацій.

Алгоритм. На стадії ініціалізації розв'язання спрощеної оберненої задачі гравірозвідки проводитися формування даних задачі, а потім приведення рівняння (1) до безрозмірного вигляду:

1) Будемо вважати, що Земна поверхня області D — прямокутник. Позначимо її в подальшому S_D. Вимірюємо вертикальну проекцію сили тяжіння в вузлах прямокутної сітки, і відновимо її в усіх точках S_D за допомогою згладжувального двовимірного сплайну. У більш складному випадку можуть бути зроблені виміри в довільних точках S_D, а для інтерполяції вертикальної проекції сили тяжіння в усіх точках S_D скористаємося тріангуляцією.

2) Визначаємо з геологічних міркувань усереднене значення щільності ρ_0 в області D.

3) Вводимо поняття базової точки. Під базовою точкою будемо розуміти точку на Земній поверхні області D, яка віддалена на досить велику відстань від відомих пустот. Ці пустоти не повинні практично впливати на вертикальну проекцію сили тяжіння в базовій точці, яку позначимо через F_{0Z}. Це буде свого роду еталон — якою має бути гравітація в усіх точках S_D області D при відсутності пустот. Величину F_{0Z} віднімемо з правої частини рівняння (1). Розділивши рівняння (1) на константу ρ_0 та гравітаційну постійну можна отримати приведене безрозмірне інтегральне рівняння, в якому щільність середовища може приймати тільки два значення. Відзначимо, що завдяки такому перетворенню відбудеться своєрідна «інверсія» щільності. Суцільне середовище в цьому випадку буде мати розрахункову щільність нуль, а щільність порожнини стане рівною мінус один, але це не суттєво для подальшого процесу і є розрахунковою абстракцією.

4) Область D розбиваємо на P елементів дискретизації — однакових прямокутних паралелепіпедів, починаючи від поверхні Землі.

5) Зарезервуємо масив Porod довжини P для накопичення «статистики» по кожному блоку. Тут буде зберігатися інформація щодо того, ідентифікований даний блок чи ні. Від цього залежить, чи входить цей блок в формування СЛАР. Спочатку всі блоки вважаються не ідентифікованими.

Тепер описуємо алгоритми зовнішньої і внутрішньої ітерацій.

6) Формуємо СЛАР за допомогою формул (8) для випадково вибраних точок спостереження M_J. Число точок спостереження повинно збігатися з числом СЕ D_i дискретизації P. Для стійкості рішення СЛАР введемо умову — точки повинні розташовуватися одна від одної не ближче, ніж на відстані R_0 (задана величина, яку користувач може вибирати). Таким чином, ми виключаємо дуже близькі точки спостереження. Розрахуємо матрицю системи СЛАР та її праву частини для ще не ідентифікованих блоків.

7) Розв'язуємо СЛАР, в результаті будуть визначені щільності всіх не ще ідентифікованих блоків. Виконаємо ці дії K раз (4—6), але змінюючи при цьому точки спостереження випадковим чином. В результаті буде проведена своєрідна регуляризація приведеного дискретизованого рівняння (1) за рахунок вибору випадкових точок спостереження. Отримуємо K рішень рівняння, що дозволяє ідентифікувати частину блоків на предмет його належності до порожнини або до суцільного середовища.

Пункти 6) та 7) можна назвати внутрішньою ітерацією.

8) Будемо аналізувати сукупність отриманих K рішень рівняння (1) по евристичному алгоритму. Для цього можна вибирати різні стратегії, але найбільш ефективною виявилась така — якщо щільність блоку в більшості випадків відрізняється від –1 або 0 на величину менше заданої, то його щільність вважається визначеною і цей блок виключається з розгляду. Таким чином, в кожній зовнішньої ітерації декілька з P блоків ідентифікуються або як ті, що належать до порожнини, або як суцільне середовище, інші ж не можуть бути достовірно віднесені до жодної з цих категорій.

9) Відмітимо в масиві Poroda номери тих блоків, які вже ідентифіковані і виключимо вплив ідентифікованих блоків на значення вертикальної проекції сили тяжіння. Для цього віднімемо від вертикальної проекції сили тяжіння в точках спостереження поле ідентифікованих блоків з урахуванням інверсії.

10) Змінимо поточну кількість блоків з урахуванням вже ідентифікованих. Якщо поточна кількість блоків дорівнює нулю, то алгоритм закінчений. Він також буде закінчений, якщо модифіковане поле тяжіння дорівнюватиме нулю. Якщо ці умови не виконані, то переходимо на пункт 6) та виконуємо нову зовнішню ітерацію.

Очевидно, що швидше і надійніше за все будуть ідентифіковані блоки, які лежать найближче до поверхні Землі. Також слід зазначити, що виключивши частину блоків, ми отримаємо поле сили тяжіння, яке, можливо, вже не буде достовірним — за рахунок помилок заокруглень при вимірюванні. Таким чином, метод працездатний тільки до певної глибини H і цей параметр залежить, перш за все, від абсолютної похибки вимірювань.

Пункти 6) та 10) можна назвати зовнішньою ітерацією. Повторюючи їх кілька разів, практично завжди приходимо до повністю ідентифікованої області аномалій.

Цей алгоритм є принципово паралельним за своєю суттю. Найбільш ресурсоємні пункти 6) та 7) внутрішніх ітерацій можна виконувати паралельно, на декількох процесорах.

Іншою перевагою алгоритму є природна регуляризація за рахунок випадкового вибору точок спостереження.

Висновки

Запропоновано працездатний метод вирішення тривимірних інтегральних рівнянь гравіметрії для знаходження пустот за рахунок спрощення постановки. Знайдені аналітичні формули розрахунку коефіцієнтів СЛАР для визначення невідомих значень щільності середовища в разі елементів дискретизації у вигляді прямокутних паралелепіпедів. Розроблений алгоритм розрахунку для визначення наявності та геометрії порожнин. Алгоритм має властивості самореґуляризації та паралельності.

Список використаної літератури

1. Тихонов А. И. Методы решения некорректных задач / А. И. Тихонов, В. Я. Арсенин. – Москва: Наука, 1979. – 288 с.
2. Верлань А. Ф. Интегральные уравнения: методы, алгоритмы, программы / А. Ф. Верлань, В. С. Сизиков. – Киев: Наукова думка, 1986. – 544 с.
3. Мудрецова Е. А. Гравиразведка: Справочник геофизика / Е. А. Мудрецова, К. Е.Веселова. – Москва: Недра, 1990. – 607 с.
4. Старостенко В. И. Устойчивые численные методы в задачах гравиметрии / Виталий Иванович Старостенко. – Киев: Наукова думка, 1978. – 228 с.
5. Корн Г. Справочник по математике (для научных работников и инженеров) / Г. Корн, Т. Корн. – Москва: Наука, 1974. – 832 с.

INVESTIGATION OF MATHEMATICAL METHODS FOR SOLVING GRAVITY PROBLEM LOCALIZATION OF CAVITY

Smolyanskiy P.S., Kozikov A.V., Shamrai E.V.

Abstract

The task of determining the availability of samples and their approximate geometry becomes an increasingly urgent task for geophysics in modern conditions. For this purpose, it is most appropriate to use the gravitational field as an affordable and universal field, the technology of which is quite advanced and currently worked in modern geophysics. An adequate condition for determining the availability of subspaces and their geometry is the solution of the integral gravimetric equation of the first kind, which is known to be a reverse incorrect task. This process has fundamental difficulties. The authors propose a method for solving simplified three-dimensional integral equations of gravimetry in order to obtain the availability and obtain approximate geometry of cavities. The convenient analytical formulas are proposed for calculating the SLR coefficients in the case of piecewise constant approximation of the density function of the medium and the selection of the sampling elements in the form of rectangular parallelepipeds.

Conclusions. A workable method of solving three-dimensional integral gravimetric equations for finding voids is proposed due to simplification of the statement. The analytical formulas for calculation of SLR coefficients for determining the unknown values of environment density in the case of sampling elements in the form of rectangular parallelepipeds are found. The algorithm of calculation for determination of availability and geometry of cavities is developed. The algorithm has the properties of self-regulation and parallelism.

References

[1] Tihonov, A.N., & Samarskiy, A.A. (1986). *Metody resheniya nekorrektnyh zadach [Methods for solving ill-posed problems]*. Moscow: Nauka.

[2] Verlan, A.F., & Sizikov, V.S. (1986). *Integralnye uravnenia: metody, algoritmy, programmy [Integral equation methods, algorithms and programs]*. Kiev: Naukova Dumka.

[3] Mudretsova, E.A. (Eds.). (1990). *Gravirazvedka. Spravochnik geofizika [Gravimetric. Directory of geophysics]*. Moscow: Nedra.

[4] Starostenko, V.I. (1978). *Ustoychivye chislennye metody v zadachah gravimetrii [Stable numerical methods in gravity]*. Kiev: Naukova Dumka.

[5] Korn, G., & Korn, T. (Eds.). (1974). *Spravochnik po matematike. Dlia nauchnyh rabotnikov i ingenerov [Mathematical Handbook for Scientists and Engineers]*. Moscow: Nauka.