DOI:
УДК 536.2
Ю.М. Пишнограєв, к.ф.-м.н., доцент, pyshnograevyuri@gmail.com
Г.І. Штанько, старший викладач, anna.shtanko177@ gmail.com
Інженерний інститут Запорізького національного університету, м. Запоріжжя

СПЕКТРАЛЬНА ЗАДАЧА З КУСКОВО-ПОСТІЙНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ В ТРИВИМІРНІЙ ОБЛАСТІ

Об'єктом дослідження є спектральна задача щодо невідомої функції трьох змінних. Коефіцієнти, що входять у вихідне рівняння в частинних похідних, є кусково-постійними уздовж однієї із змінних. Рівняння задано в області, яка представляє собою два прямокутних паралелепіпеда із спільною межею. На всіх межах паралелепіпеда задаються крайові умови. Розв'язання проводиться методом поділу змінних. В результаті вихідна задача зводиться до трьох самостійних спектральних задач. Особливий інтерес представляє задача щодо змінною, вздовж якої коефіцієнти кусково-постійні. Для цієї задачі отримані рівняння для знаходження власних значень і побудована ортогональна система власних функцій.
***Ключові слова**: спектральна задача; власна функція; власне значення.*

The object of the study is the spectral problem with respect to the unknown function of the three variables. The coefficients entering the original partial differential equation are piecewise constant along one of the variables. The equation is given in a region that consists of two rectangular parallelepipeds with a common border. On all the boundaries of the parallelepiped, boundary conditions are set. The solution is carried out by the method of separation of variables. As a result, the initial problem is reduced to three independent spectral problems. Of particular interest is the problem with respect to a variable along which the coefficients are piecewise constant. For this problem, equations for determining the eigenvalues are obtained and an orthogonal system of eigenfunctions is constructed.
***Key words**: spectral problem; eigenfunctions; eigenvalue.*

Постановка проблеми

При розв'язанні дифузійних завдань математичної фізики методами інтегральних перетворень або розділення змінних центральне місце займає дослідження відповідної спектральної задачі.

Її розв'язком є власні функції, що в подальшому можуть використовуватися в якості ядер інтегральних перетворень. Це дає можливість знаходити розв'язок дифузійних задач у вигляді розвинення в функціональний ряд.

Система власних функцій, яка є розв'язком спектральної задачі, повинна мати властивості повноти і ортогональності. В цьому випадку стандартні алгоритми дозволяють отримувати достовірні аналітичні розв'язки для широкого класу задач математичної фізики.

Таким чином, вивчення спектральних задач і їх розв'язання є важливою і актуальною частиною наукового дослідження.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Знаходження розв'язку спектральних задач дозволяє побудувати повну систему власних функцій, які в подальшому використовуються в якості ядер скінчених інтегральних перетворень. Спектральні задачі з постійними коефіцієнтами вивчені в роботах [1] і [2]. В роботі [3] робиться спроба розгляду спектральної задачі з кусково-постійними коефіцієнтами. Вивченню особливостей спектральної задачі для двовимірної області присвячена робота [4].

Формулювання мети дослідження

Метою дослідження є розв'язання тривимірної спектральної задачі з кусково-постійними коефіцієнтами, а саме вивчення особливостей побудови ортогональної системи функцій і відповідного набору власних значень.

Виклад основного матеріалу

Задана прямокутна область, яка представляє собою два прямокутних паралелепіпеда зі спільною межею (рис.1). Сталі a і λ приймають в області ($-l_1 < x < 0; 0 < y < b; 0 < z < h$) значення a_1, λ_1, а в області ($0 < x < l_2; 0 < y < b; 0 < z < h$) значення a_2, λ_2.

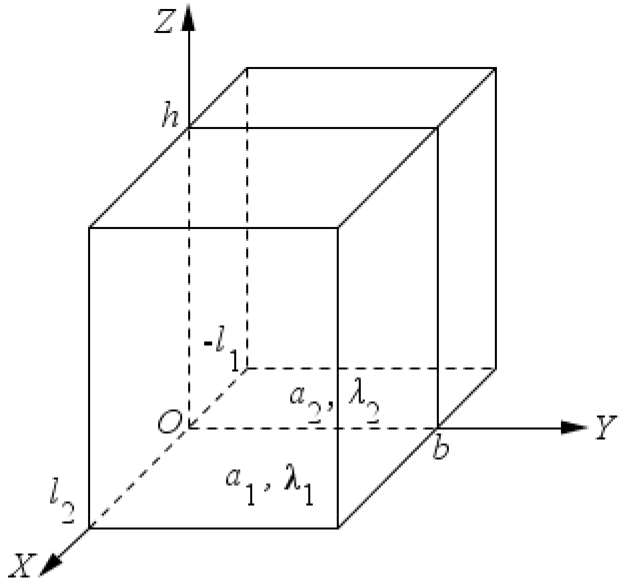

Рис.1. Тривимірна область

Рівняння в частинних похідних відносно функції $\Phi(x,y,z)$ має вигляд

$$a\left(\Phi_{xx}(x,y,z)+\Phi_{yy}(x,y,z)+\Phi_{zz}(x,y,z)\right)+\beta^2\Phi(x,y,z)=0\,, \tag{1}$$

де β^2 квадрат власних чисел спектральної задачі.

На зовнішніх і на спільних межах області задані крайові умови

$$\begin{cases} \Phi(-l_1,y,z)=0, \\ \Phi(l_2,y,z)=0, \\ \Phi(x,0,\mathrm{z})=0, \\ \Phi(x,h,z)=0, \\ \Phi(x,y,0)=0, \\ \Phi(x,y,h)=0, \\ \Phi(-0,y,z)=\Phi(+0,y,z), \\ \lambda_1\Phi_x(-0,y,z)=\lambda_2\Phi_x(+0,y,z). \end{cases} \tag{2}$$

Нехай

$$\Phi(x,y,z)=\varphi(x)\theta(y)\psi(z)\,. \tag{3}$$

Тоді після підстановки (3) в рівняння (1) отримаємо

$$a(\varphi''(x)\theta(y)\psi(z)+\varphi(x)\theta''(y)\psi(z)+\varphi(x)\theta(y)\psi''(z))+\beta^2\varphi(x)\theta(y)\psi(z)=0\,. \tag{4}$$

Після ділення обох частин рівняння (4) на $a\varphi(x)\theta(y)\psi(z)$ та перенесення доданків, що залежать від змінних y і z, у праву частину, маємо

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}+\frac{\beta^2}{a}=-\left(\frac{\theta''(y)}{\theta(y)}+\frac{\psi''(z)}{\psi(z)}\right). \tag{5}$$

Рівність лівої і правої частин виразу (5) можлива лише у випадку, коли ліва і права частини (5) дорівнюють деякій сталій μ^2. В результаті (5) розпадається на два рівняння:

$$\varphi''(x)+\left(\frac{\beta^2}{a}-\mu^2\right)\varphi(x)=0, \tag{6}$$

$$\frac{\theta''(y)}{\theta(y)}+\frac{\psi''(z)}{\psi(z)}=-\mu^2. \tag{7}$$

Розглянемо рівняння (7). З нього випливає, що кожен з доданків у правій частині повинен дорівнювати деякій від'ємній сталій. Тобто

$$\frac{\theta''(y)}{\theta(y)}=-\eta^2,\quad \frac{\psi''(z)}{\psi(z)}=-\nu^2. \tag{8}$$

Якщо вираз (3) підставити в умови (2), то отримаємо для рівнянь (8) відповідні крайові умови. У підсумку приходимо до двох схожих класичних задач Штурма-Ліувілля. Одна відносно змінної y

$$\begin{gathered}\theta''(\mathrm{y})+\eta^2\theta(y)=0,\\ \theta(0)=0, \theta(b)=0.\end{gathered} \tag{9}$$

Інша відносно змінної z

$$\begin{gathered}\psi''(\mathrm{z})+\nu^2\psi(z)=0,\\ \psi(0)=0, \psi(h)=0.\end{gathered} \tag{10}$$

Розв’язки задач (9) і (10) добре відомі. Розв’язком (9) є нескінченний набір функцій

$$\theta(y)=\sin(\eta_k y), \tag{11}$$

де власні значення $\eta_k=\frac{k\pi}{b}, k\in Z$, і квадрат норми $\|\theta\|^2=\frac{b}{2}$.

Аналогічним чином записується розв’язок задачі (10)

$$\psi(z)=\sin(\nu_m z), \tag{12}$$

де $\nu_m=\frac{m\pi}{h}, m\in Z$, і квадрат норми $\|\psi\|^2=\frac{h}{2}$.

Розглянемо рівняння (6). Доповнимо це рівняння крайовими умовами, які легко отримати, якщо підставити (3) в умови (2). В результаті маємо спектральну задачу відносно невідомої функції $\varphi(x)$

$$\varphi''(x)+\left(\frac{\beta^2}{a}-\mu^2\right)\varphi(x)=0, \tag{13}$$

$$\begin{cases}\varphi(-l_1)=0,\\ \varphi(l_2)=0,\\ \varphi(-0)=\varphi(+0),\\ \lambda_1\varphi'(-0)=\lambda_2\varphi'(+0).\end{cases} \tag{14}$$

Відзначимо, що стала, яка входить в рівняння (13), приймає безліч значень: $\mu_{km}^2=\mu_k^2+\nu_m^2$. Для визначеності покладемо, що $a_1<a_2$. Тоді можливі два випадки розташування власних значень β.

1. Нехай $\beta\in\left(\mu\sqrt{a_1};\mu\sqrt{a_2}\right)$. Введемо позначення $\gamma_1^2=\frac{\beta^2}{a_1}-\mu^2,\quad \gamma_2^2=\mu^2-\frac{\beta^2}{a_1}$. Якщо прийняти, що $\varphi_1(x)\in(-l_1;0), \varphi_2(x)\in(0;l_2)$, вираз (13) запишеться у вигляді

$$\varphi_1''(\mathrm{x})+\gamma_1{}^2\varphi_1(x)=0\,;$$
$$\varphi_2''(\mathrm{x})-\gamma_2^2\varphi_2(x)=0\,. \tag{15}$$

Розв’язками (15) є функції

$$\varphi_1(x)=\mathrm{A}_1\sin(\gamma_1 x)+B_1\cos(\gamma_1 x)\,;$$
$$\varphi_2(x)=\mathrm{A}_2 sh(\gamma_2 x)+B_2 ch(\gamma_2 x)\,, \tag{16}$$

де A_1, B_1, A_2, B_2 — деякі, поки невідомі, сталі. Для їх визначення використовуємо умови (14). В результаті отримуємо систему лінійних однорідних рівнянь

$$\begin{cases} -\mathrm{A}_1\sin(\gamma_1 l_1)+B_1\cos(\gamma_1 l_1)=0, \\ B_1=\mathrm{B}_2, \\ \lambda_1\gamma_1 A_1=\lambda_2\gamma_2 A_2, \\ \mathrm{A}_2 sh(\gamma_2 l_2)+B_2 ch(\gamma_2 l_2)=0. \end{cases} \tag{17}$$

Система (17) має нетривіальні розв’язки, якщо

$$\frac{\lambda_2\gamma_2}{\lambda_1\gamma_1}tg(\gamma_1 l_1)=-th(\gamma_2 l_2)\,. \tag{18}$$

Вираз (18) є трансцендентним алгебраїчним рівнянням, з якого визначається нескінченний набір власних значень β_{lkm}^2 .

Вважаючи $A_1=\cos(\gamma_1 l_1)$, з системи (17) знаходимо значення інших сталих $B_1=B_2=\sin(\gamma_1 l_1)$, $A_2=-cth(\gamma_2 l_2)\sin(\gamma_1 l_1)$.

Таким чином, розв’язки задачі (13), (14) для $\beta\in\left(\mu\sqrt{a_1};\mu\sqrt{a_2}\right)$ знайдено. Це є функції (16). Відзначимо, що ці функції ортогональні на проміжку $[-l_1;l_2]$ з вагою $\dfrac{\lambda}{a}$, тобто

$$\frac{\lambda_1}{a_1}\int_{-l_1}^{0}\varphi_{1i}(x)\varphi_{1j}(x)dx+\frac{\lambda_2}{a_2}\int_{0}^{l_2}\varphi_{2i}(x)\varphi_{2j}(x)dx=\begin{cases}0, & i\neq j,\\ \|\varphi\|^2, & i=j,\end{cases} \tag{19}$$

де
$$\|\varphi\|^2=\frac{1}{2}\left[\frac{\lambda_1}{a_1}\left(l_1-\frac{A_1B_1}{\gamma_1}\right)+\frac{\lambda_2}{a_2}\left(l_2\left(B_2^2-A_2^2\right)-\frac{A_2B_2}{\gamma_2}\right)\right]. \tag{20}$$

2. Нехай $\beta\in\left(\mu\sqrt{a_2}\,;+\infty\right)$. В цьому випадку різниця $\dfrac{\beta^2}{a_2}-\mu^2$ буде додатною. Позначимо її через γ_2^2 . Тоді рівняння (13) перепишуться у вигляді

$$\varphi_1''(\mathrm{x})+\gamma_1{}^2\varphi_1(x)=0\,;$$
$$\varphi_2''(\mathrm{x})+\gamma_2^2\varphi_2(x)=0\,. \tag{21}$$

Розв’язками рівнянь (21) є функції

$$\varphi_1(x)=\mathrm{A}_1\sin(\gamma_1 x)+B_1\cos(\gamma_1 x)\,;$$
$$\varphi_2(x)=\mathrm{A}_2\sin(\gamma_2 x)+B_2\cos(\gamma_2 x)\,. \tag{22}$$

Використовуючи крайові умови (14), приходимо до системи для визначення власних значень β^2 і постійних A_1, B_1, A_2, B_2

$$\begin{cases} -A_1 \sin(\gamma_1 l_1) + B_1 \cos(\gamma_1 l_1) = 0, \\ B_1 = B_2, \\ \lambda_1 \gamma_1 A_1 = \lambda_2 \gamma_2 A_2, \\ A_2 \sin(\gamma_2 l_2) + B_2 \cos(\gamma_2 l_2) = 0. \end{cases} \tag{23}$$

Власні значення β^2 визначаються з трансцендентного рівняння

$$\frac{\lambda_2 \gamma_2}{\lambda_1 \gamma_1} tg(\gamma_1 l_1) = -tg(\gamma_2 l_2) . \tag{24}$$

При цьому значення постійних дорівнюють

$$A_1 = \cos(\gamma_1 l_1), \; B_1 = B_2 = \sin(\gamma_1 l_1), \; A_2 = -ctg(\gamma_2 l_2)\sin(\gamma_1 l_1),$$

а квадрат норми ортогональної системи власних функцій можна знайти з наступної рівності

$$\|\varphi\|^2 = \frac{1}{2}\left[\frac{\lambda_1}{a_1}\left(l_1 - \frac{A_1 B_1}{\gamma_1}\right) + \frac{\lambda_2}{a_2}\left(l_2\left(A_2^2 + B_2^2\right) + \frac{A_2 B_2}{\gamma_2}\right)\right].$$

Висновки та перспективи подальших досліджень

Таким чином розв'язком спектральної задачі є набір функцій $\Phi(x,y,z) = \varphi(x)\theta(y)\psi(z)$, де функції $\varphi(x)$ визначаються виразами (16), (22), а функції $\varphi(x), \theta(y)$ виразами (11) і (12) відповідно. Знайдені власні функції можна в подальшому використовувати у якості ядер інтегральних перетворень для розв'язання тривимірних задач дифузійного типу. Слід зазначити, що перспективними є напрямки, пов'язані з розв'язанням спектральних задач для тривимірних областей для випадку, коли задані рівняння містять конвективну складову.

Список використаної літератури

1. Карташев Э.М. Аналитические методы в теории теплопроводности / Э.М. Карташев. – М.: Высш. шк., 1985. – 480 с.
2. Фарлоу С. Уравнения с частными производными для научных работников и инженеров / С. Фарлоу. – М.: Мир, 1985. – 384 с.
3. Плятт Ш.Н. Расчеты температурных полей бетонных гидросооружений / Ш.Н. Плятт. – М. Энергия, 1974. – 407 с.
4. Пышнограев Ю.Н. Задача о распространении тепла в ортотропной двуслойной пластине при нагреве точечными источниками тепла / Ю.Н. Пышнограев, // Труды I ВК «Технологические проблемы прочности несущих конструкций» Т.1, Ч.2, Запорожье, 1991.

SPECTRAL PROBLEM WITHPIECEWISE CONSTANT COEFFICIENTS FOR THREE DIMENTIONAL REGION

Pyshnograev Y.N., Shtanko A.I.

Abstract

While solving diffuse problem sof mathematical physics with the integral transformation method or the method of separation of variables the pride of place goes to the investigation of the corresponding spectral problem. Its solution is its own functions, thatin prospect can be used as kernels of integral transformation. It makes it possible to find solutions of diffuse problems represented bydecomposing into functional series. The system of eigenfunctions, that are the solving of spectral problem, must possess properties of completeness and orthogonality. In this case, standard algorithms allow to obtain reliable analytical solutions for a wide class of problems of mathematical

physics. Thus, the study of spectral problems and their solutions is an important and relevant part of scientific research.

The mathematical problem definitionincludes a partial differential equation for an unknown function of three variables. The coefficients in the equation are piecewise constant in a region that consists of two rectangular parallelepipeds with a common border. Boundary conditions are set on all the borders of the parallelepiped.

To obtain a solution, the required function is represented as a product of three unknown functions, each of which depends on one of the three spatial variables. As a result, the required problem resolves itself into three spectral problems. Two of them are the classical Sturm-Liouville problems. Of special interest is the third spectral problem with respect to a variable in the line of which the coefficients of the equation are piecewise constant. It is shown that for its solution it is necessary to consider two open intervals of the eigenvaluesordering. Transcendental equations for determining eigenvalues were obtained at each of the open intervals, and orthogonal systems of eigenfunctions were constructed.

It is concluded that the discoveredeigenfunctions can later be used as kernels of integral transformations for solving three-dimensional problems of diffusion type. It should be noted that the directions connected to the solution of spectral problems for three-dimensional domains are promising in cases where the given equations contain a convective component.

References

[1] Kartashov E.M., (1985). *Analiticheskie metody v teorii teploprovodnosti tverdykh tel* [Analytical methods in the theory of thermal conductivity of solids]. Moskow: Vysshaya shkola [in Russian].

[2] Plyatt S.N. (1974). *Raschety temperaturnykh poley betonnykh gidrosooruzheniy* [Calculations of temperature fields of concrete hydro structures]. Moskow: Energiya [in Russian].

[3] Pyshnograev Y.N. (1991). Zadacha o rasprostranenii tepla v ortotropnoy dvukhsloynoy plastine pri nagreve tochechnymi istochnikami [The problem of the propagation of heat in an orthotropic two-layer plate when heated by point sources of heat.]. Proceedings from: *1 Vsesoiusnaya konferentsiya «Tekhnologicheskie problemy prochnosti nesushchikh konstruktsyi»- The First All-Union Conference «Technological problems of strength of bearing structures».*(vol.1, ch.1, pp. 155-160) Zaporozh'e (in Russian).

[4] Farlow S. (1985). *Uravneniya s chastnimi proizvodnymi dlya nauchnikh rabotnikov i injenerov [Partial differential equations for Scientists and Engineers]*. (A.Plis, Trans). Moskow: Mir [in Russian].