DOI:
УДК 681.04
Ю.Д. Поліський, канд. техн. наук, polissky477@gmail.com
НДІ автоматизації чорної металургії, м. Дніпро

ДОСЛІДЖЕННЯ МЕТОДІВ РЕАЛІЗАЦІЇ ДЕЯКИХ СКЛАДНИХ ОПЕРАЦІЙ У СИСТЕМІ ЗАЛИШКОВИХ КЛАСІВ

В роботі досліджені системи залишкових класів з можливістю реалізації складних операцій розширення системи модулів та визначення приналежності числа даної половині діапазону чисел.
***Ключові слова**: залишкові класи; складні операції; системи модулів; діапазон чисел.*

Residual classes systems with the possibility for realization of complex operations for expansion system modules and membership number determination of a given half range for numbers are investigated.
***Keywords**: residual classes; complex operations; module systems; range of numbers.*

Постановка проблеми

Ефективне управління зростаючими потоками інформації в сучасних системах управління пов'язано з паралелізмом обчислень. Одним із перспективних напрямків підвищення продуктивності обчислювальних структур та їх надійності є застосування непозиційної системи залишкових класів (СЗК), що має високий ступень паралелізму [1].

При виконанні обчислювань у СЗК нерідко виникає необхідність розширення діапазону зображення чисел. Вирішення такої задачі може бути потрібним, наприклад, при модульному діленні чисел, зображених у СЗК, у тих випадках, коли здійснюється ділення на число, кратне одному або декільком модулям системи. Тому операція розширення системи модулів, при якій по відомим залишкам частки для декількох модулів СЗК визначають значення залишків по інших модулях, відноситься до однієї із основних немодульних операцій у системі залишкових класів.

Визначення приналежності числа даної половині діапазону також є базовою немодульною операцією в модулярній системі залишкових класів. На її основі можуть бути отримані рішення ряду інших немодульних операцій. У зв'язку з цим актуальним є питання розробки алгоритмів підвищення швидкодії даної операції.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Вирішенню складностей при реалізації операцій розширення системи модулів та визначення приналежності числа даної половині діапазону у СЗК присвячений ряд публікацій [2—5]. При значних досягненнях у зіставленні з початковими рішеннями, що викладені у класичній фундаментальній монографії [1], залишаються певні вимоги до деяких показників, зокрема, швидкодії даних операцій.

Формулювання мети дослідження

Метою дослідження є аналітичний розгляд СЗК для реалізації базових складних операцій розширення системи модулів і визначення приналежності числа даної половині діапазону.

Виклад основного матеріалу

Під СЗК розуміють систему числення, в якій довільне число N представляється у вигляді набору найменших невід'ємних залишків по модулях m_1, m_2,..., m_n, тобто $N=(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n)$. Тут $\alpha_i = N(\operatorname{mod} m_i)$. При цьому, якщо числа m_i попарно взаємно прості, то такому представленню відповідає тільки одне число N діапазону $[0, M)$, де $M = m_1 m_2 ... m_n$.

Задача розширення системи модулів полягає в тому, щоб отримати на підставі залишків по модулях m_1, m_2,..., m_n зображення числа N у СЗК із модулями $m_1, m_2, \ldots, m_n, m_{n+1}, \ldots, m_k$, тобто, визначити залишки $\alpha_{n+1}, \ldots, \alpha_k$ по модулях відповідно $m_{n+1}, m_{n+2}, \ldots, m_k$.

Будемо відрізняти числа першої $R1$ і другої $R2$ половини діапазону

$$N \in \begin{cases} R1, 0 \le N < \dfrac{M}{2}, \\ R2, \dfrac{M}{2} \le N < M \end{cases}$$

Якщо системою модулів поліадичного коду також є система m_1, m_2,..., m_n, число N в поліадичному коді представляється у вигляді

$N = \pi_1 + \pi_2 m_1 + ... + \pi_i m_1 m_2 ... m_{i-1} + ... + \pi_{n-1} m_1 m_2 ... m_{n-2} + \pi_n m_1 m_2 ... m_{n-1}$, де π_i — позиційна характеристика, $0 \le \pi_i \le m_i - 1$.

В роботі [6] показано, що критерієм приналежності числа даної половині діапазону служить значення π_n і наведено загальний підхід при будь-якому парному модулі.

$$N \in \begin{cases} R1, \quad 0 \le \pi_n \le \dfrac{m_n}{2} - 1 \\ R2, \dfrac{m_n}{2} \le \pi_n \le m_n - 1 \end{cases}$$

Зокрема, для $m_n = 2$

$$N \in \begin{cases} R1, \pi_n = 0 \\ R2, \pi_n = 1 \end{cases}$$

Базовий алгоритм [2] для вирішення обох цих задач полягає в наступному.

Визначення π_n здійснюється шляхом послідовного віднімання з числа $N = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ додатків представлення цього числа в поліадичному коді, починаючи з модуля m_1, до отримання $\tilde{N} = (0, 0, \ldots, 0, \tilde{\alpha}_n)$. При цьому $\pi_t = \dfrac{\tilde{\alpha}_t}{m_1 m_2, \ldots, m_{t-1}} (\bmod t)$, а константи віднімання $\Delta_s = (\pi_t \cdot m_1 m_2, \ldots, m_{t-1})(\bmod s)$, $s = t, t+1, \ldots, n$., При фіксованій впорядкованості $m_1, m_2, \ldots,$ $m_n = 2$ складаються таблиці попередньо розрахованих констант.

Вирішення задачі розширення діапазону зображення чисел у системі залишкових класів полягає в наступному. Метод базується на визначенні залишка по даному модулю на підставі отриманих залишків по решті модулів системи. Таке визначення виконують послідовним відніманням констант із отриманих залишків та підсумовуванням цих констант до результатів, які формуються по даному модулю. При цьому константи на кожній ітерації вибираються із попередньо розрахованих таблиць констант в залежності від значення залишка у аналізуємому розряді до отримання $\tilde{N} = (0, 0, \ldots, 0, 0, \tilde{\alpha}_{n+1})$.

На рис. 1 для системи модулів $m_1 = 5, m_2 = 7, m_3 = 3, m_4 = 2, m_5 = 13$ представлений графік залежності часу реалізації базового алгоритму від величини числа – ряд 1. Середній час (кількість ітерацій) по даному алгоритму $T = \dfrac{\sum_{T=1}^{s} t k_t}{\sum_{t=1}^{s} k_t}$, де $t = 1, 2, \ldots, s$ — величина числа, k_t — кількість чисел величини t.

Для системи модулів $m_1 = 5, m_2 = 7, m_3 = 3, m_4 = 2, m_5 = 13$ $T_1 = 32$.

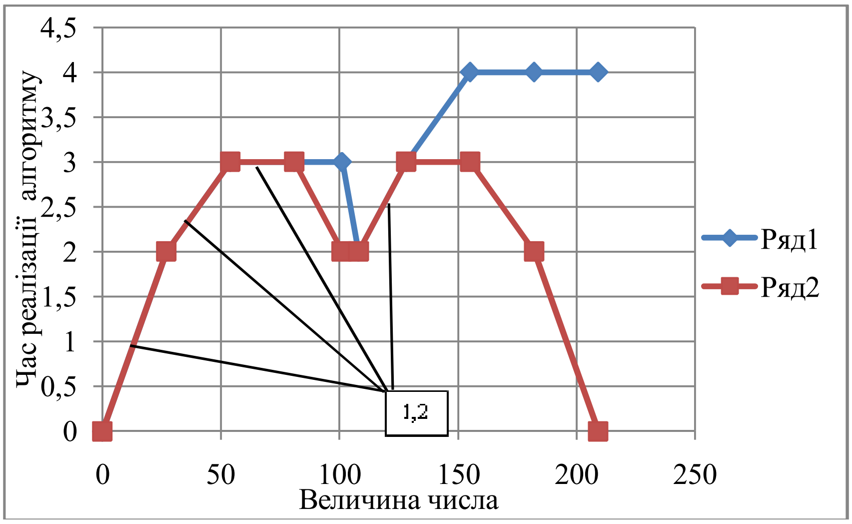

Рис. 1. Залежність часу реалізації алгоритму від величини числа: ряд 1 — базовий алгоритм;ряд 2 — алгоритм з представленням чисел одночасно в прямому і зворотному кодах

Для збільшення швидкодії алгоритму автором було введено уявлення чисел одночасно в прямому і зворотному кодах з можливістю переходу в процесі роботи алгоритму від одного представлення до іншого [7].

При завданні числа N залишками число $\bar{N}=\left(\bar{\alpha}_1,\bar{\alpha}_2,\ldots,\bar{\alpha}_n\right)$ є представленням числа $N=(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_n)$ в зворотному коді, де $\bar{\alpha}_i=(m_i-1)-\alpha_i$ — зворотний код залишку α_i.

При завданні числа N в поліадичному коді число

$$\bar{N}=\bar{\pi}_1+\bar{\pi}_2m_1+\ldots+\bar{\pi}_im_1m_2\ldots m_{i-1}+\cdots+\bar{\pi}_{n-1}m_1m_2\ldots m_{n-2}+\bar{\pi}_nm_1m_2\ldots m_{n-1}$$

є представленням числа

$$N=\pi_1+\pi_2m_1+\ldots+\pi_im_1m_2\ldots m_{i-1}+\cdots+\pi_{n-1}m_1m_2\ldots m_{n-2}+\pi_nm_1m_2\ldots m_{n-1}$$

в зворотному коді, де $\bar{\pi}_i=(m_i-1)-\pi_i$ — зворотний код позиційної характеристики π_i.

На рис.1 для тієї ж системи модулів $m_1=5,m_2=7,m_3=3,m_4=2,m_5=13$ наведений графік залежності часу реалізації алгоритму з представленням чисел одночасно в прямому і зворотному кодах від величини числа – ряд 2. Тут $T_2=21$. Отже, середнє збільшення швидкодії $\theta=\dfrac{T_1}{T_2}=\dfrac{32}{21}=1,52$.

Табл.1 ілюструє роботу базового алгоритму для визначення приналежності числа $N=136$ даної половині діапазону та розширення діапазону зображення чисел в системі модулів $m_1=5,m_2=7,m_3=3,m_4=2,m_5=13$. Кількість ітерацій $\tilde{T}_1=3$. У табл. 2—5 записані константи, необхідні для роботи алгоритму.

Табл. 6 ілюструє роботу базового алгоритму для визначення приналежності числа $N=136$ даної половині діапазону в системі модулів $m_1=5,m_2=7,m_3=3,m_4=2$ та розширення діапазону зображення чисел для модуля $m_5=13$ при роботі в зворотних кодах. Зворотний код для $N=136$ є $\bar{N}=(M-1)-N=73$. Кількість ітерацій $\tilde{T}_2=2$. Константи, необхідні для роботи алгоритму, наведені у табл.2—5. При цьому обидві шукані операції можуть бути виконані одночасно.

Таблиця 1

Модулі					
Число	**5**	**7**	**3**	**2**	**13**
	Залишки				
136	1	3	1	0	0
−	1	1	1	1	1
	0	2	0	1	1
−	=	2	0	0	4
	=	0	0	***1***	5
−	=	=	=	1	1
	=	=	=	0	***6***

Таблиця 2

Модулі						
5			**7**	**3**	**2**	**13**
π_1	$\tilde{\alpha}_1$	Δ_5^1	Δ_7^1	Δ_3^1	Δ_2^1	Δ_{13}^1
0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	0	2
3	3	3	3	0	1	3
4	4	4	4	1	0	4

Таблиця3

Модулі					
7			**3**	**2**	**13**
π_2	$\tilde{\alpha}_2 = \pi_2 m_1$	Δ_7^2	Δ_3^2	Δ_2^2	Δ_{13}^2
0	0	0	0	0	0
1	5	5	2	1	5
2	3	3	1	0	10
3	1	1	0	1	2
4	6	6	2	0	7
5	4	4	1	1	12
6	2	2	0	0	4

Таблиця 4

Модулі				
3			**2**	**13**
π_3	$\tilde{\alpha}_3 = \pi_3 m_1 m_2$	Δ_3^3	Δ_2^3	Δ_{13}^3
0	0	0	0	0
1	2	2	1	9
2	1	1	0	5

Таблиця 5

Модулі			
2			**13**
π_4	$\tilde{\alpha}_4 = \pi_4 m_1 m_2 m_3$	Δ_2^4	Δ_{13}^4
0	0	0	0
1	1	1	1

Таблиця 6

Модули					
Число	**5**	**7**	**3**	**2**	**13**
	Залишки				
73	3	3	1	1	0
−	3	3	0	1	3
	=	0	1	0	3
−	=	=	1	0	5
	=	=	0	***0***	***8***

Перехід від залишку $\bar{\alpha}_{n+1} = \bar{\alpha}_{13}$ до залишку $\alpha_{n+1} = \alpha_{13}$ виконується наступним чином. Нехай ${\alpha^N}_{n+1} = N\left(\operatorname{mod} m_{n+1}\right)$ та $\bar{\alpha}_{n+1}^N = ((M-1)-N)\left(\operatorname{mod} m_{n+1}\right)$. Тоді

$$ {\alpha^{M-1}}_{n+1} = (M-1)\left(\operatorname{mod} m_{n+1}\right) $$

та

$$ {\alpha^{M-1}}_{n+1} = ({\alpha^N}_{n+1} + \bar{\alpha}_{n+1}^N)(\operatorname{mod} m_{n+1}) . $$

Залишок ${\alpha^{M-1}}_{n+1} = (M-1)\left(\operatorname{mod} m_{n+1}\right) = 209(\operatorname{mod} 13) = 1$. Залишок $\bar{\alpha}_{n+1}^N = 8$. Отже ${\alpha^N}_{n+1} = (1-8)(\operatorname{mod} 13) = 6$. Збільшення швидкодії $\tilde{\theta} = \dfrac{\tilde{T}_1}{\tilde{T}_2} = \dfrac{3}{2} = 1{,}50$.

Табл. 7 ілюструє роботу алгоритму для визначення приналежності числа $N = 73$ даної половині діапазону в системі модулів $m_1 = 5, m_2 = 7, m_3 = 3, m_4 = 2$ та розширення діапазону зображення чисел для модуля $m_5 = 13$ при роботі одночасно в прямому і зворотному кодах з переходами в процесі роботи алгоритму від одного представлення числа до іншого.

Таблиця 7

Модулі							Модулі					
Число	**5**	**7**	**3**	**2**	**13**		Число	**5**	**7**	**3**	**2**	**13**
	Залишки							Залишки				
73	3	3	1	1	0		**136**	1	3	1	0	0
−	3	3	0	1	3		−	1	1	1	1	1
	=	0	1	0	3			0	2	0	1	1
−	=	=	1	0	5		−	=	2	0	0	4
	=	=	0	***0***	***8***			=	0	0	1	**5**

Висновки

Досліджені методи реалізації в системі залишкових класів базових складних операцій розширення системи модулів і визначення приналежності числа даної половині діапазону. Показано, що проаналізовані методи забезпечують отримання шуканих результатів. На основі запропонованих підходів досягається підвищення швидкодії виконання операцій розширення системи модулів і визначення приналежності числа даної половині діапазону. Представляється доцільним застосувати запропоновані підходи в якості перспективного напрямку досліджень цих операцій в системі залишкових класів.

Список використаної літератури

1. Акушский И.Я., Юдицкий Д.И. Машинная арифметика в остаточных классах. М.: Советское радио. 1968. 440 с.
2. Полисский Ю.Д. О выполнении сложных операций в системе остаточных классов. *Электронное моделирование.* Київ. 2006. №3. Т. 28. С. 117–123.
3. Поліський Ю.Д. Про один метод розширення діапазону зображення чисел у системі залишкових класів. *Математичне моделювання*. Кам’янське. 2007. №2(17). С. 16–17.
4. Полисский Ю.Д. Определение в системе остаточных классов принадлежности числа данной половине диапазона. *Науковий вісник НГУ*. Дніпро. 2007. №2. С. 66–69.
5. Методы и алгоритмы округления, масштабирования и деления чисел в модулярной арифметике / Н.И. Червяков [и др.]. *50 лет модулярной арифметики: тр. юбил. Междунар. науч.-техн. конф. (23.11–25.11.2005).* М.: Моск. ин-т электрон. техники. 2005. С. 291–310.
6. Полисский Ю.Д. Определение принадлежности числа, представленного системой остаточных классов, данной половине диапазона. *Проблеми математичного моделювання: матеріали наук.-метод.конф. 24-26 трав.2017 р.* Дніпро. 2017. С. 112–114.
7. Полисский Ю.Д. Алгоритм выполнения сложных операций в системе остаточных классов с помощью представления чисел в обратных кодах. *Электронное моделирование*. Київ. 2014. №4 Т. 36. С. 117–123.

METHODS OF REALIZATION FOR SOME COMPLEX OPERATIONS IN THE SYSTEM OF RESIDUAL CLASSES

Polissky Yu.D.

Abstract

The operation of control systems always involves comparing the states of controlled objects that are evaluated by the corresponding values of numbers. The computing structures through which the above-mentioned operations of numerical comparison are performed are constantly required to

increase the speed. Application of the system of residual classes (SRC) allows to increase the productivity of such systems. With significant advantages of the operations of comparing numbers in the SRC there are some difficulties in their implementation in this system, which require further research. The purpose of this study is the analytical review of the SRC for the implementation of complex operations of pairwise and group comparison of numbers. When comparing numbers pairwise, you need to find more or less of them. When grouping the numbers, the following tasks are solved: the definition of the maximum and minimum numbers of a group, the definition of the length of the range of the group of numbers, the determination of the position of the numbers of the group in relation to a certain fixed number, the definition of numbers inside a certain subband, the definition of the number closest to the given number, the definition the number closest to the given and the nearest smaller to the given number. Studies of the comparison of numbers in the SRC showed that all the variety of solutions for pairwise comparison of numbers can be obtained on the basis of three approaches. First, for each of the comparable numbers, positional characteristics are calculated, after which a comparative comparison of these characteristics with the traditional methods of comparison is performed. The second approach uses the definition of the membership of numbers and their difference to the upper or lower half of the range of numbers. If the numbers belong to different halves of the range, then the larger (smaller) is the number of the upper (lower) half. If the numbers belong to one half, then, if their difference is greater than the upper half of the range, there is a decreasing number. The third approach is based on the compilation of each of the numbers of the reduced differences, resulting in the entire range of numbers is broken into a number of sub-bands, within each of which the values of the residues are the same. Next, consider the third approach to solving the problems of pairwise and group comparison of numbers based on the simultaneous representation of numbers in the forward and reverse codes with the choice of active representation in each iteration.

References

[1] Akushsky I.Ya., & Yuditsky D.I. (1968). *Mashinaia arifmetika v ostatochnikh klassakh [Machine arithmetic in the residual classes].* Moscow: Soviet Radio [in USSRian].

[2] Polissky Yu.D.(2006). O vipolnenii slozhnikh operatsii v sisteme ostatochnikh klassov [On the performance of complex operations in the system of residual classes]. *Elektronnoe modelirovanie – Electronic Modeling, 28.(3),* 117–123. Київ.[in Ukrainian].

[3] Polissky Yu.D.(2007). Pro odin metod rozcshirennia diapazonu zobrazjennia chisel u sistemi zalishkovikh klasssiv [About one method of extending the range of the image of numbers in the system of residual classes]. *Matematichne modeljuvannie – Mathematical modeling. 17(2)*. 16–17. Кам'янське. [in Ukrainian].

[4] Polissky Yu.D.(2007). Opredelenie v sisteme ostatochnikh klassov prinadlezjnosti chisla dannoi polovine diapazona. [Determination in the system of residual classes of a number for a given half of the range]. *Naukovii visnyk NGU – Scientific Bulletin NMU, 1.* 63–66. Дніпро. [in Ukrainian].

[5] Chervyakov N.I.(2005)/ Metodi I algoritmi okruglenia, mascshtabirovania I delenia chisel v moduliarnoi arifmetike/ [Methods and algorithms for rounding, scaling, and division of numbers in modular arithmetic]. *50 let moduliarnoii arifmeniki: tr. Jubil. Mejdunar. Nauch.-tehn/ konf. (23.11–25.11.2005) – 50 years of modular arithmetic: scientific papers celebrated Int. scientific and technical conf. (11/23 – 11/25/2005).* 291–310. M.: Mosk. Institute of Electron. Technicians. [in Russianian].

[6] Polissky Yu.D. (2017). Opredelenie prinadlezjnosti chisla, predstavlennogo sistemoii ostatochnikh klassov, dannoi polovine diapazona. [Determining whether a number represented by a system of residual classes belongs to a given half of the range]. *Problemi mathematichnogo modeluvannia: materiali naukovo – method. konf. 24-26 trav.2017r. – Problems of mathematical modeling: materials of sciences.-method.konf. 24-26 may 2017y.* 112–114 Дніпро. [in Ukrainian].

[7] Polissky Yu.D. (2014). Algoritm vipolnenia slozhnikh operatsii v sisteme ostatochnikh klassov [Algorithm for performing complex operations in the system of residual classes using the representation of numbers in inverse codes] *Elektronnoe modelirovanie – Electronic Modeling, 36.(4),* 117–122. Київ.[in Ukrainian].