DOI:
УДК 681.04
Ю.Д. Поліський, к.т.н., polissky477@gmail.com
НДІ автоматизації чорної металургії, м. Дніпро

ПРО ОДИН АЛГОРИТМІЧНИЙ ПІДХІД ДО ВИЗНАЧЕННЯ РАНГУ ЧИСЛА В СИСТЕМІ ЗАЛИШКОВИХ КЛАСІВ

В роботі досліджено систему залишкових класів щодо можливості реалізації немодульної операції визначення рангу числа.
***Ключові слова**: залишкові класи; системи модулів; діапазон чисел;ранг числа.*

The system of residual classes on the possibility of realization of a nonmodular operation of determining the rank of a number is investigated in the work.
***Keywords**: residual classes; module systems; range of numbers; number rank.*

Постановка проблеми

Підвищення ефективності обчислень пов'язано в даний час з впровадженням принципів паралельної обробки інформації, заснованої на представленні чисел в системі залишкових класів (СЗК) [1]. Переваги та недоліки СЗК детально розглянуті в [2]. До переваг СЗК, зокрема, відносяться мала розрядність залишків, висока точність і надійність, здатність системи до самокорекції. Недоліки обумовлені труднощами при реалізації немодульних операцій. До таких операцій відносяться визначення приналежності числа даної половині діапазону, порівняння чисел, визначення виходу числа за діапазон, операції розширення діапазону представлення чисел, ділення, визначення переповнення, масштабування, контроль помилок обчислень та інші. При виконанні деяких з цих операцій виникає задача визначення рангу числа.

Система числення залишкових класів — це система, в якій довільне число представлено у вигляді набору найменших невід'ємних залишків по модулях $m_1, m_2,..., m_n$, тобто $N = (\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n)$. Тут $\alpha_i = N(\mathrm{mod}\ m_i)$. При цьому, якщо числа m_i взаємно прості, то такому представленню відповідає тільки одне число N в діапазоні $[0, M)$, де $M = m_1 m_2 ... m_n$.

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Вперше підхід до вирішення даної задачі запропоновано в класичній роботі [1].

В [3, 4] виконано докладне дослідження відомих алгоритмів визначення рангу числа з переліком недоліків, основним з яких є необхідність переходу чисел з СЗК в позиційну систему числення і навпаки.

Результати виконаних досліджень свідчать про можливість отримання більш ефективних рішень. Пропонований новий алгоритмічний підхід дозволяє істотно спростити практичну реалізацію і прискорити отримання рангу числа.

Формулювання мети дослідження

Метою дослідження є аналітичний розгляд СЗК для реалізації немодульної операції визначення рангу числа.

Виклад основного матеріалу

Введемо до системи модулів $m_1, m_2,..., m_n$ додатковий інформаційний модуль m_k. Отже, $M_k = Mm_k$.

Нехай в результаті виконання деяких операцій отримане число, представлене залишками $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n, \alpha_k$ в діапазоні $[0, M_k)$ як $N_1 = (\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n, \alpha_k)$, та представлене залишками $\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n$ в діапазоні $[0, M)$ як $N = (\alpha_1, \alpha_2,..., \alpha_n)$.

При обробці даних, представлених в СЗК, може знадобитися характеристика, що називається рангом числа, яка показує скільки разів треба відняти величину діапазону з отриманого числа, щоб повернути його до діапазона. Так, наприклад, для того, щоб в системі модулів $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_3 = 5$ повернути число $N_a = 113 = (\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 2, \alpha_3 = 3)$ до діапазона $M = m_1 m_2 m_3 = 30$ необхідно тричі відняти з цього числа величину діапазона до отримання $\widetilde{N}_a = 23 < M$.

Позначимо r_{N_1} — ранг числа N_1. Тоді $N_1 = r_{N_1} M + N$.

Отже, $\alpha_k = N_1 (\bmod m_k) = (r_{N_1} M + N)(\bmod m_k)$.

Величина $\widetilde{\alpha}_k = N(\bmod m_k)$ — відновлений залишок [5] $\widetilde{\alpha}_k$ числа N по його залишках $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.

Перепишемо α_k у вигляді $\alpha_k = ((r_{N_1} M)(\bmod m_k) + \widetilde{\alpha}_k)(\bmod m_k)$. Звідси $r_{N_1} = \left(\dfrac{(\alpha_k - \widetilde{\alpha}_k)(\bmod m_k)}{M(\bmod m_k)} \right)(\bmod m_k)$. Оскільки для даної системи робочих модулів величина $M_0 = M(\bmod m_k)$ постійна, $r_{N_1} = \left(\dfrac{(\alpha_k - \widetilde{\alpha}_k)(\bmod m_k)}{M_0} \right)(\bmod m_k)$.

Таким чином $r_{N_1} = \left(\dfrac{(\alpha_k - \widetilde{\alpha}_k)(\bmod m_k)}{M_0} \right)(\bmod m_k)$.

Отже, послідовність дій для обчислення ранга числа наступна.

1. Відновлюємо залишок $\widetilde{\alpha}_k$ числа N по його залишках $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$.
2. Складаємо різницю залишків $\delta = (\alpha_k - \widetilde{\alpha}_k)(\bmod m_k)$.
3. Виконуємо ділення $r_{N_1} = \dfrac{\delta}{M_0}(\bmod m_k)$.

Покажемо визначення рангу числа на наступному прикладі.

Нехай в системі модулів $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_3 = 5$, $m_k = 11$, $M = m_1 m_2 m_3 = 30$, $M = m_1 m_2 m_3 m_k = 330$, та $M_0 = 8$ отримано число $N_1 = 159 = (\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 4, \alpha_k = 5)$ діапазона $[0, M_k)$ та $N = 9 = (\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 4)$ діапазона $[0, M)$.

1. Відновлюємо залишок $\widetilde{\alpha}_k$ числа N по його залишках $\alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 4$.

Відновлення залишку виконуємо по одному з варіантів [5], при якому здійснюється одночасне виконання алгоритму як для числа $N = 9$, так і для зворотнього йому числа $\overline{N} = (M - 1) - N = 29 - 9 = 20$ [6], за допомогою табл. 1—5 для тієї ж системи модулів $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_3 = 5$, $m_k = 11$. При цьому шуканий залишок визначається за значенням $\widetilde{\alpha}_k$ того з чисел, для якого першим отримується результат $(\widetilde{\alpha}_1 = 0, \widetilde{\alpha}_2 = 0, ..., \widetilde{\alpha}_k)$.

Табл. 1, табл. 2 та табл. 3 містять константи віднімання, необхідні для обчислення залишків, що відновлюються.

В наведеному прикладі табл. 4 та табл. 5 ілюструють процес отримання шуканого залишка на підставі табл. 1, табл. 2 та табл. 3 констант віднімання.

Звернемось до табл. 4. В першому рядку залишок по модулю $m_1 = 2$ дорівнює $\alpha_{m_1} = 1$. Отже, для залишка по модулю $m_1 = 2$ табл. 1 рядок констант віднімання має вигляд $\gamma_{m_1} = 1$, $\gamma_{m_2} = 1$, $\gamma_{m_3} = 1$, $\gamma_{m_k} = 1$ відповідно по модулях $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_3 = 5$, $m_k = 11$. Виконуємо $\alpha^1_{m_1} = \alpha_{m_1} - \gamma_{m_1} = 0$, $\alpha^1_{m_2} = \alpha_{m_2} - \gamma_{m_2} = 2$, $\alpha^1_{m_3} = \alpha_{m_3} - \gamma_{m_3} = 3$, $\alpha^1_{m_k} = \alpha_{m_k} - \gamma_{m_k} = 1$ $\alpha^1_{m_k} = \alpha_{m_k} - \gamma_{m_k} = 1$.

Таблиця 1

Модулі					
$m_1 = 2$			$m_2 = 3$	$m_3 = 5$	$m_k = 11$
π_2	$\widetilde{\alpha}_1$	γ_{m_1}	γ_{m2}	γ_{m_3}	γ_{m_k}
0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1

Таблиця 2

Модулі				
$m_2 = 3$			$m_3 = 5$	$m_k = 11$
π_2	$\widetilde{\alpha}_2 = \pi_2 m_1$	γ_{m_1}	γ_{m_3}	γ_{m_k}
0	0	0	0	0
1	2	2	2	2
2	1	1	4	4

Таблиця 3

Модулі			
$m_3 = 5$			$m_k = 11$
π_2	$\widetilde{\alpha}_3 = \pi_3 m_1 m_2$	γ_{m_3}	γ_{m_k}
0	0	0	0
1	1	1	6
2	2	2	1
3	3	3	7
4	4	4	2

Таблиця 4

	Модулі				
	Число	$m_1 = 2$	$m_2 = 3$	$m_3 = 5$	$m_k = 11$
		Залишки			
1	$N = 9$	$\alpha_{m_1} = 1$	$\alpha_{m_2} = 0$	$\alpha_{m_3} = 4$	$\alpha_{m_k} = 0$
2	—	$\gamma_{m_1} = 1$	$\gamma_{m_{12}} = 1$	$\gamma_{m_3} = 1$	$\gamma_{m_k} = 1$
3	N^1	$\alpha^1_{m_1} = 0$	$\alpha^1_{m_2} = 2$	$\alpha^1_{m_3} = 3$	$\alpha^1_{m_k} = 1$
4	—	$\gamma^1_{m_1} = 0$	$\gamma^1_{m_{12}} = 2$	$\gamma^1_{m_3} = 2$	$\gamma^1_{m_k} = 2$
5	N^2	$\alpha^2_{m_1} = 0$	$\alpha^2_{m_2} = 0$	$\alpha^2_{m_3} = 1$	$\alpha^2_{m_k} = 3$
6	—	$\gamma^2_{m_1} = 0$	$\gamma^2_{m_{12}} = 0$	$\gamma^2_{m_3} = 1$	$\gamma^2_{m_k} = 6$
7	N^3	$\alpha^3_{m_1} = 0$	$\alpha^3_{m_2} = 0$	$\alpha^3_{m_3} = 0$	$\alpha^3_{m_k} = 9$

В третьому рядку залишок по модулю $m_2 = 3$ дорівнює $\alpha^1_{m_2} = 2$. Отже, для залишка по модулю $m_2 = 3$ табл. 1 рядок констант віднімання має вигляд $\gamma^1_{m_1} = 0$, $\gamma^1_{m_2} = 2$, $\gamma^1_{m_3} = 2$, $\gamma^1_{m_k} = 2$ відповідно по модулях $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_3 = 5$, $m_k = 11$. Виконуємо $\alpha^2_{m_1} = \alpha^1_{m_1} - \gamma^1_{m_1} = 0$, $\alpha^2_{m_2} = \alpha^1_{m_2} - \gamma^1_{m_2} = 0$, $\alpha^2_{m_3} = \alpha^1_{m_3} - \gamma^1_{m_3} = 1$, $\alpha^2_{m_k} = \alpha^1_{m_k} - \gamma^1_{m_k} = 3$.

Таблиця 5

	Число	Модулі			
		$m_1 = 2$	$m_2 = 3$	$m_3 = 5$	$m_k = 11$
		Залишки			
1	$\bar{N} = 20$	$\alpha_{m_1} = 0$	$\alpha_{m_2} = 2$	$\alpha_{m_3} = 0$	$\alpha_{m_k} = 0$
2	—	$\gamma_{m_1} = 0$	$\gamma_{m_{12}} = 2$	$\gamma_{m_3} = 2$	$\gamma_{m_k} = 2$
3	$\bar{N}^1$	$\alpha^1{}_{m_1} = 0$	$\alpha^1{}_{m_2} = 0$	$\alpha^1{}_{m_3} = 3$	$\alpha^1{}_{m_k} = 2$
4	—	$\gamma^1{}_{m_1} = 0$	$\gamma^1{}_{m_{12}} = 0$	$\gamma^1{}_{m_3} = 3$	$\gamma^1{}_{m_k} = 7$
5	$\bar{N}^2$	$\alpha^3{}_{m_1} = 0$	$\alpha^3{}_{m_2} = 0$	$\alpha^3{}_{m_3} = 0$	$\alpha^3{}_{m_k} = 9$

В п’ятому рядку залишок по модулю $m_3 = 5$ дорівнює $\alpha^2_{m_2} = 1$. Отже, для залишка по модулю $m_3 = 5$ табл. 1 рядок констант віднімання має вигляд $\gamma^2_{m_1} = 0$, $\gamma^2_{m_2} = 0$, $\gamma^2_{m_3} = 1$, $\gamma^2_{m_k} = 6$ відповідно по модулях $m_1 = 2$, $m_2 = 3$, $m_3 = 5$, $m_k = 11$. Виконуємо $\alpha^3_{m_1} = \alpha^2_{m_1} - \gamma^2_{m_1} = 0,$ $\alpha^3_{m_2} = \alpha^2_{m_2} - \gamma^2_{m_2} = 0$, $\alpha^3_{m_3} = \alpha^2_{m_3} - \gamma^2_{m_3} = 0$, $\alpha^3_{m_k} = \alpha^2_{m_k} - \gamma^2_{m_k} = 9$.

Звернемось до табл. 5 та виконаємо операції, аналогічні операціям щодо табл. 4.

Зауважимо, що згідно з [5] здійснюється одночасне виконання алгоритму як для числа $N = 9$, так і для зворотнього йому числа $\bar{N} = (M-1) - N = 29 - 9 = 20$.

В підсумку спочатку для $\bar{N}$ отримано 9, $(\tilde{\alpha}_1 = 0, \tilde{\alpha}_2 = 0, ..., \tilde{\alpha}_k = 9)$ за дві ітерації. На цьому процес отримання шуканого залишка припиняється. Отже, $\bar{\tilde{\alpha}}_k = 9$.

Тепер треба виконати перехід від залишка $\bar{\tilde{\alpha}}_k = \bar{\tilde{\alpha}}_{11}$ числа $\bar{N} = 20$ $\bar{N} = 20$ до залишка $\tilde{\alpha}_k = \tilde{\alpha}_{11}$ $\tilde{\alpha}_k = \tilde{\alpha}_{11}$ зворотнього йому числа $N = 9$.

Перехід від залишка $\bar{\tilde{\alpha}}_k = \bar{\tilde{\alpha}}_{11}$ до залишка $\tilde{\alpha}_k = \tilde{\alpha}_{11}$ виконується наступним чином. Нехай $\tilde{\alpha}_k = N\left(\bmod m_k\right)$ і $\bar{\tilde{\alpha}}_k = ((M-1) - N)\left(\bmod m_k\right)$. Тоді $\tilde{\alpha}_k^{M-1} \equiv (M-1)\left(\bmod m_k\right)$ та $\tilde{\alpha}_k^{M-1} \equiv (\tilde{\alpha}_k + \bar{\tilde{\alpha}}_k)(\bmod m_k)$. Залишок $\tilde{\alpha}_k^{M-1} \equiv (M-1)\left(\bmod m_k\right) = 29(\bmod 11) = 7$. Залишок $\bar{\tilde{\alpha}}_k = 9$. Отже, $\tilde{\alpha}_k = (7-9)(\bmod 11) = 9$.

2. Складаємо різницю залишків $\delta = (\alpha_k - \tilde{\alpha}_k)(\bmod m_k)$.

Тобто, $\delta = (\alpha_k - \tilde{\alpha}_k)(\bmod m_k) = (5-9)(\bmod 11) = 7$.

3. Виконуємо ділення $r_{N_1} = \dfrac{\delta}{M_0}(\bmod m_k) = \dfrac{7}{8}(\bmod 11) = 5$.

Отже, ранг числа $N_1 = 159$ дорівнює 5, тобто необхідно п'ять разів відняти величину діапазона $M = 30$ із числа $N_1 = 159$, щоб повернути його до діапазону.

Таким чином, розглянутий підхід забезпечує ефективне визначення рангу числа в системі залишкових класів.

Висновки

Досліджено метод реалізації в системі залишкових класів немодульної операції визначення рангу числа. Показано, що запропонований метод забезпечує отримання шуканого результату. На основі запропонованого підходу досягається підвищення швидкодії виконання операції визначення рангу числа. Представляється доцільним застосувати запропонований підхід в якості перспективного напрямку досліджень складних операцій в системі залишкових класів.

Список використаної літератури

1. Акушский И.Я., Юдицкий Д.И. Машинная арифметика в остаточных классах. М.: Советское радио. 1968. 440 с.
2. Методы и принципы построения модулярных нейрокомпьютеров / Н.И. Червяков. *50 лет модулярной арифметики: тр. юбил. Междунар. науч.-техн. конф. (23.11–25.11.2005).* М.: Моск. ин-т электрон. техники. 2005. С. 232–242.
3. Лавриненко А.Н., Червяков Н.И. Исследование немодульных операций в системе остаточных классов// *Научные ведомости БелГУ. Серия.: История. Политология. Экономика. Информатика*, 2012. №1 (120). Вып. 21/1 с.110-122.
4. Краснобаев В.А. Примеры определения ранга числа, представленного в непозиционной системе счисления остаточных классов / В.А. Краснобаев, А.А. Замула, А.С. Янко // Радиотехника : всеукр. межвед. науч.-техн. сб. / Харьк. нац. ун-т радиоэлектроники. Харків, 2018. Вып. 193. С. 143–151.
5. Полисский Ю.Д. Об одном алгоритмическом решении задачи восстановления остатка числа в системе остаточных классов / *«Системні технології»* 3 (128) 2020 «System technologies»- С. 154–164.
6. Полисский Ю.Д. Алгоритм выполнения сложных операций в системе остаточных классов с помощью представления чисел в обратных кодах. / *Электронное моделирование*. 2014. Т. 36. № 4. С. 117–123.

ON ONE ALGORITHMIC APPROACH TO DETERMINING THE RANK OF A NUMBER IN THE SYSTEM OF RESIDUAL CLASSES

Polissky Yu.

Abstract

When performing operations of expanding the range of representation of numbers, division, determination of overflow, scaling, control of computational errors in a non-positional number system of residual classes, the problem of determining the rank of a number arises. The rank of the number is a characteristic, which will show how much if you need to change the value to the range from the set number, then turn it into the range. The tools of the research methodology are systems analysis, number theory, and the Chinese remainder theorem. The research methodology is based on the introduction of an information module in addition to the system of working modules and the use of the difference between the real and reconstructed residues for this module. Restoring the remainder of a number for a given module is performed based on the remainders of this number for the rest of the system modules. This determination is performed by successive subtraction of constants from the resulting residues of the original number and summing these constants to the results that are formed by the desired modulus. When the constants at each iteration are selected from pre-calculated tables, depending on the values of the remainder in the analyzed digit. Restoring the remainder is carried out according to an accelerated version, in which, in accordance with the basic algorithm, actions are performed simultaneously for the number under investigation and the number opposite to the

investigated one. In this case, the desired remainder is determined by the value of the remainder of the number for which the search result is obtained first. The result of the work is the completed theoretical substantiation of the proposed approach to obtain an effective solution to the problem of determining the rank of a number. The proposed approach is algorithmically simple and it is expedient to consider it as one of the directions of research on ways to increase the efficiency of computations in the residual class system.

References

[1] Akushsky I.Ya., & Yuditsky D.I. (1968). *Mashinaia arifmetika v ostatochnikh klassakh [Machine arithmetic in the residual classes].* Moscow: Soviet Radio [in USSRian].

[2] Metodi i principi postroenia moduliarnih neirokompyuterov / M.I.(Chervyakov [Methods and principles of building modular neurocomputers]. *50 let moduliarnoii arifmeniki: tr. Jubil. Mejdunar. Nauch.-tehn/ konf. (23.11–25.11.2005) 50 years of modular arithmetic: scientific papers celebrated Int. scientific and technical conf. (11/23 - 11/25/2005).* 232–242. M.: Mosk. Institute of Electron. Technicians. [in Russianian].

[3] Lavrinenko O.M., Chervyakov M.I. (2012). Issledovanie nemodulnih operatsiy v sisteme ostatochnih klassov [Investigation of non-modular operations in the system of residual classes]. *Scientific bulletin of BelSU. Series .: History. Political science. Economy. Computer science. No. 1 (120). Issue 21/1. 110–122.*

[4] Krasnobaev V.A. Primeri opredelenia ranga chisla, predstavlennogo v nepozitsionnoy sisteme schislenia ostatochnih klassov/ V.A.Krasnobaev, Zamula A.A., Yanko A.C. //Radiotehnika: vseukr. mejved nauch.-tehn/ sb./ Khark. nat. un-t radioelektroniki.- Kharkov, 2018/ Vip/193/ S. 143–151.

[5] Polissky Yu.D.(2020). Ob odnom algoritmicheskom reshenii zadachi vosstanovlenia ostatka chisla v sisteme ostatochnih klassov/ «System technologies» 3 (128). 154–164.

[6] Polissky Yu.D.(2014). Algoritm vipolnenia slojnih operatsiy v sisteme ostatochnih klassov s pomoschu predstavlenia chisel v obratnih kodah/ *Elektronnoe modelirovanie. Electronic Modeling, 36.(4),* 117–123.