

DOI: 10.31319/2519-8106.1(46)2022.258345

УДК 537.86

М.О. Гнатюк, к.ф.-м.н., доцент, uv5ekt@gmail.com, ORCID: 0000-0002-1455-5408

І.С. Гаркавенко, студент

А.М. Кононенко, студент

Дніпровський державний технічний університет, м. Кам'янське

МАТРИЧНЕ ПРЕДСТАВЛЕННЯ ЕЛЕКТРОДИНАМІЧНОГО АЛГОРИТМУ МЕТОДУ ШВАРЦА ДЛЯ РОЗВ'ЯЗАННЯ ДИФРАКЦІЙНИХ ЗАДАЧ

В роботі представлено подальший розвиток ітераційного методу Шварца та методу часткових перетинних областей для розв'язання задач дифракції електромагнітної хвилі у хвилеводних лініях передачі. Запропоновано числові алгоритми, які дозволили підвищити ефективність наведених математичних методів при розв'язанні дифракційних задач за рахунок підвищення їх швидкодії і спрощення процедури алгоритмізації. В якості результату наведено залежність часу чисельного розв'язання тестової задачі в залежності від початкових умов для різних варіантів розглянутих методів.

Ключові слова: ітераційні методи, інтегральні рівняння, векторизація, дифракція.

The further development of the Schwartz alternating method and the method of overlapping partial domains for solving the electromagnetic wave diffraction problems is presented in this paper. Numerical algorithms, which allow increasing the efficiency of presented mathematical methods by increasing their performance and simplifying the algorithmization procedure, are proposed. As a result, the dependence of the performance time for the different variants of the considered methods is presented.

Keywords: iterative methods, integral equations, vectorization, diffraction.

Постановка проблеми

Задача дослідження процесу дифракції електромагнітних хвиль методами математичного моделювання відноситься до граничних задач математичної фізики, оскільки призводить до необхідності розв'язування системи диференціальних рівнянь Максвелла, які задовольняють граничним умовам на межах областей [1]. В даний час розв'язування дифракційних задач класичної електродинаміки виконується як з використанням числових сіткових методів, наприклад, методу скінченних елементів і скінченних різниць [2—4], так і різноманітних чисельно-аналітичних методів [5].

При проектуванні та аналізі пристроїв надвисоких частот (НВЧ) часто використовують комерційні програми комп'ютерного моделювання [6, 7]. Такі програми реалізують універсальні числові методи і дозволяють розв'язувати широкий спектр електродинамічних задач, однак, навіть для сучасних ЕОМ процес чисельного моделювання вимагає значних витрат часу, а у відсутності хорошого початкового наближення, найчастіше, взагалі не дозволяють розв'язати поставлену задачу. Таким чином, розвиток чисельно-аналітичних методів аналізу хвилеводних пристроїв є актуальною задачею.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

В останній час увагу дослідників привертають такі методи розв'язання задач математичної фізики, які базуються на розбитті всієї області визначення функції на прості дотичні або перетинні області. Група таких методів отримала назву *domain decomposition methods* (DDM) [8—10]. Ці методи є перспективними з точки зору їх універсальності, а також потенційної їх можливості використання у паралельних обчисленнях [8].

В останнє десятиріччя для розв'язання задач електродинаміки надвисоких частот отримали свого подальшого розвитку перспективні методи з вказаної групи, а саме: ітераційний метод Шварца [11] і похідні від нього методи інтегральних рівнянь часткових перетинних областей (МЧПО) [12] та пронизуючої області (МПО) [13] з використанням апарату функцій Гріна.

В основі цих методів лежить прийом розбиття всієї складної області визначення поля на прості перетинні області, для яких функція Гріна відома або може бути легко побудована. Вихідна задача формулюється у вигляді інтегрального рівняння Фредгольма другого роду або їх системи відносно шуканих полів часткових областей, які розв'язуються ітераційними або проєкційними методами. Очевидними перевагами цих методів, у порівнянні з широко відомим методом часткових областей [14], є автоматичне врахування умов на ребрі та відсутність необхідності знаходження похідної невідомої функції на границях часткових областей [15].

Формулювання мети дослідження

У сучасній техніці НВЧ знаходять широке застосування складні хвильоводно-резонаторні системи. Для елементів конструкцій таких хвильоводних пристроїв характерною є стрибкоподібна зміна розмірів поперечного перерізу регулярного хвильоводу. Подібні переходи застосовуються при з'єднанні хвильоводів з різними поперечними розмірами, а також можуть розглядаються як складові частини більш складних пристроїв: фільтрів, перетворювачів типів хвиль, трансформаторів імпедансів і інших пристроїв [16].

У разі застосування методу Шварца до задач дифракції електромагнітної хвилі на східчастих неоднорідностях у хвильоводних пристроях, функції Гріна представляються у вигляді розкладання в нескінченний ряд за повною системою ортогональних власних функцій відповідної часткової області [17]. Чисельна реалізація такого підходу призводить до необхідності послідовного обчислення вкладених сум, кількість членів яких обмежується кінцевою величиною. Збільшення числа врахованих членів ряду призводить до підвищення точності та достовірності результатів, але в той же час, і до значного зростання часу рахунку, що в деяких випадках робить застосування методу Шварца та МЧПО недоцільним у порівнянні з іншими методами. Проте, сучасне програмне і апаратне забезпечення чисельних математичних розрахунків дозволяє [18] значно прискорити алгоритми розрахунків у разі представлення арифметичних операцій над скалярними величинами як операцій над векторами чи матрицями.

Метою даної роботи є подальший розвиток представлених вище методів, який дозволяє підвищити їх швидкодію і спростити алгоритмізацію за рахунок використання апаратних і програмних можливостей сучасної обчислювальної техніки.

Виклад основного матеріалу

Розглянемо застосування ітераційного методу Шварца та МЧПО на прикладі розв'язання тестової задачі дифракції електромагнітної хвилі на нескінченній фазованій антенній решітці (ФАР) з прямокутних хвильоводів, розміщених у вузлах прямокутної сітки.

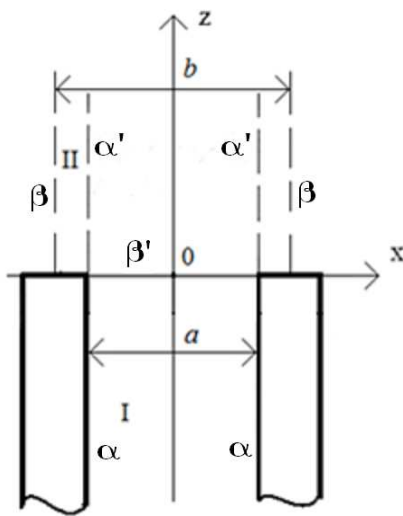


Рис. 1. Одинична комірка нескінченної фазованої решітки з плоскопаралельних хвильоводів

Користуючись моделлю нескінченної антенної решітки і теоремою Флоке [19, 20], обмежимося розглядом поля в межах тільки одного періоду антенної решітки (однієї комірки) і початкову задачу зведемо до задачі про стик двох хвильоводів: хвильоводу решітки та просторового хвильоводу, або комірки Флоке.

На рис. 1 зображено одиничну комірку решітки з хвильоводів, що збуджуються хвилями типу H_{10} . Вважаємо, що сканування здійснюється в H -площині і стінки хвильоводів, що перпендикулярні силовим лініям падаючого електричного поля, є нескінченно тонкими. Таким чином, задача стає одновимірною і скалярною [20]. При отриманні інтегральних рівнянь в якості невідомої функції будемо використовувати E_y компоненту поля, що задовольняє двовимірному рівнянню Гельмгольца, а також граничним умовам для тангенціальних складових вектора електричного поля на металевих стінках і умові випромінювання. Розв'язання цієї задачі методом Шварца полягає в зведенні дифе-

ренціального рівняння в часткових похідних до системи інтегральних рівнянь часткових перетинних областей, яка далі розв'язується методом послідовних наближень [21].

Розділимо всю область визначення поля в вибраній комірці на дві перетинні області (рис. 1). Область I ($-a/2 \leq x \leq a/2$) представляє собою пласкопаралельний хвилевод, продовжений в нескінченність ($-\infty \leq z \leq \infty$). Область II ($-b/2 \leq x \leq b/2, 0 \leq z \leq \infty$) — область випромінювання. В області I при $z \rightarrow -\infty$ збуджується хвиля H_{10} пласкопаралельного хвилеводу. Припустимо, що нам відомі функції Гріна областей I і II G^I, G^{II} [22]. В якості шуканої функції будемо використовувати поле першої області. Тоді, скориставшись другою формулою Гріна і врахувавши граничні умови, отримаємо інтегральне рівняння Фредгольма другого роду відносно поля першої області:

$$E^I(x, z) = E_{ex}(x, z) + \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} E^I(x'', 0) K(x, z; x'', 0) dx''; \quad (1)$$

$$K(x, z; x'', 0) = \sum_{q=1}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \varphi_q(x) \exp(j\gamma_q z) \psi_m^*(x'') C_{qm}. \quad (2)$$

$$C_{qm} = \sqrt{\frac{2}{ab}} \frac{-q\pi}{2a\gamma_q(\gamma_q + \Gamma_m)} \left[\exp\left(-j \frac{aU_m}{2b}\right) - \exp\left(j \frac{aU_m}{2b}\right) \cos(q\pi) \right].$$

$$D_{mq_0} = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} \varphi_{q_0}(x'') \psi_m^*(x'') dx''.$$

Тут E^I — невідома функція області I, значення якої шукається на границі β' (площина $z = 0, -a/2 \leq x \leq a/2$), φ та ψ — власні функції пласкопаралельного і просторового хвилеводів, U_m — керуючий зсув фаз. Для області I змінні x та z є координатами точок спостереження, а x' та z' — точок джерел поля. Для області II: x' та z' — точки спостереження, x'' та z'' — точки джерел. На частині границі α , що належить площині $z \rightarrow -\infty$, граничні значення визначаються полем падаючої хвилі типу H_{10} .

Розв'язання цього рівняння відносно невідомої функції $E^I(x, z)$ в рівнянні (1) будемо знаходити у вигляді суми падаючої та відбитої хвиль:

$$E^I(x, z) = \varphi_1(x) \exp(-j\gamma_1 z) + \sum_{q=1}^{\infty} R_q \varphi_q(x) \exp(j\gamma_q z). \quad (3)$$

Для розв'язання рівняння (1) ітераційним методом підставимо представлення (3) у ліву частину (1), а у якості початкового наближення використаємо поле падаючої хвилі:

$$E_{ex}(x, z) = \varphi_1(x) \exp(-j\gamma_1 z). \quad (4)$$

Далі, скориставшись властивістю ортогональності [23] власних функцій пласкопаралельного хвилеводу φ_q [22], отримаємо значення коефіцієнта відбиття $R_q^{<0>}$ хвилі H_{q0} по ітераціях. Наведемо нижче вирази для перших трьох ітерацій:

$$\begin{aligned} R_q^{<1>} &= \sum_{m=-\infty}^{\infty} C_{qm} D_{m1}; \\ R_{q_2}^{<2>} &= \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} C_{q_2 m_2} D_{m_2 1} + \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \sum_{q_1=1}^{\infty} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} C_{q_2 m_2} D_{m_2 q_1} C_{q_1 m_1} D_{m_1 1} = \\ &= R_{q_2}^{<1>} + \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \sum_{q_1=1}^{\infty} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} C_{q_2 m_2} D_{m_2 q_1} C_{q_1 m_1} D_{m_1 1}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{q_3}^{(3)} &= \sum_{m_3=-\infty}^{\infty} C_{q_3 m_3} D_{m_3 1} + \sum_{m_3=-\infty}^{\infty} \sum_{q_2=1}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} C_{q_3 m_3} D_{m_3 q_2} C_{q_2 m_2} D_{m_2 1} + \\
&+ \sum_{m_3=-\infty}^{\infty} \sum_{q_2=1}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{q_1=1}^{\infty} C_{q_3 m_3} D_{m_3 q_2} C_{q_2 m_2} D_{m_2 q_1} C_{q_1 m_1} D_{m_1 1} = \\
&= R_{q_2}^{(2)} + \sum_{m_3=-\infty}^{\infty} \sum_{q_2=1}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{q_1=1}^{\infty} C_{q_3 m_3} D_{m_3 q_2} C_{q_2 m_2} D_{m_2 q_1} C_{q_1 m_1} D_{m_1 1}.
\end{aligned}$$

Як видно з представлених виразів, значення коефіцієнту відбиття у ітерації i -порядку складається із його значення у ітерації $(i-1)$ порядку із додаванням уточнюючого коефіцієнту. При цьому, із зростанням кількості ітерацій кількість вкладених сум збільшується на величину $(2i-1)$. Таким чином, даний числовий алгоритм не є оптимальним з точки зору універсальності і часу, що витрачається на обчислення.

Перетворимо ітераційну послідовність так, щоб значення коефіцієнту відбиття q -хвилі в ітерації i -порядку складалось із суми його значення у першій ітерації та уточнюючого коефіцієнту, який змінюється у кожній ітерації, при цьому отримаємо наступний рекурентний вираз:

$$R_q^{(i)} = R_q^{(1)} + \sum_{q_0=1}^Q \left[\left(\sum_{m=-M}^M C_{qm} D_{mq_0} \right) \cdot R_{q_0}^{(i-1)} \right]. \quad (5)$$

Тут M і Q максимальне число врахованих типів хвиль в областях I і II. Введемо матрицю \mathbf{A} розміром $Q \times Q$, елементи якої визначаються як:

$$A_{qq_0} = \sum_{m=-M}^M C_{qm} D_{mq_0}.$$

Сума за індексами m у (5) може бути представлена як добуток матриці \mathbf{C} розміром $q \times m$ на матрицю \mathbf{D} з розмірами $m \times q_0$. Представимо множину коефіцієнтів R_q у вигляді матриці-стовпця \mathbf{R} , а вираз (5) запишемо у вигляді наступного матричного рівняння:

$$\mathbf{R}^{(i)} = \mathbf{R}^{(1)} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{R}^{(i-1)}. \quad (6)$$

Рівняння (6) визначає значення матриці-стовпця \mathbf{R} в i -наближенні при його відомому наближенні $(i-1)$ порядку. Розв'язавши дане рівняння методом послідовних наближень можна отримати величину коефіцієнта відбиття хвилі H_{10} в ітерації i -порядку, беручи в якості результату перший елемент матриці-стовпця \mathbf{R} .

Метод часткових перетинних областей (МЧПО) також використовує інтегральне рівняння (1), але береться до уваги, що ядро (2) інтегрального рівняння для даної задачі при врахуванні обмеженого числа типів хвиль є кінцевою сумою добутків лінійно незалежних функцій. Таким чином, ядро інтегрального рівняння є виродженим, що допускає отримання строгого розв'язку шляхом зведення його до кінцевої системи лінійних алгебраїчних рівнянь [21]. Розв'язок будемо знаходити у вигляді (3). Для цього, підставимо вираз (3) у ліву та праву частину рівняння (1). Тоді, скориставшись властивістю ортогональності функцій $\varphi_q(x)$ і обмеживши кінцевою величиною число врахованих типів хвиль, перейдемо до наступної системи лінійних алгебраїчних рівнянь відносно невідомих коефіцієнтів відбиття R_q :

$$R_q - \sum_{j=1}^Q R_j \sum_{m=-M}^M C_{qm} D_{mj} = \sum_{m=-M}^M C_{qm} D_{m1}, \quad q=1, 2, \dots, Q. \quad (7)$$

Вкладена сума за індексами m представляється, як і раніше, у вигляді добутку матриці \mathbf{C} розміром $q \times m$ на матрицю \mathbf{D} з розмірами $m \times j$.

Для розв'язання системи (7) введемо матрицю $\mathbf{\Lambda}$ розміром $q \times j$, елементи якої визначаються як:

$$\Delta_{qj} = \delta_{qj} - \sum_{m=-M}^M C_{qm} D_{mj},$$

де δ_{ij} — символ Кронекера. Представивши R_q у вигляді матриці-стовпця \mathbf{R} систему рівнянь (7) можна записати у вигляді наступного матричного рівняння:

$$\Delta \cdot \mathbf{R} = \mathbf{F}.$$

Розв'язання цієї системи рівнянь дозволяє отримати величину коефіцієнта відбиття хвилі типу H_{10} , яке знаходиться у першому елементі матриці-стовпця \mathbf{R} .

Для розглянутої дифракційної задачі були складені алгоритми чисельного розрахунку на ПЕОМ величини коефіцієнта відбиття падаючої хвилі в одиничній комірці ФАР із застосуванням методу Шварца і МЧПО. Для порівняння виграшу у швидкодії представленого підходу, числові алгоритми склалися як з використанням матричних арифметичних операцій, так і з використанням вкладених сум за індексами m та q . В ході розв'язання задачі фіксувався час, що витрачається на обчислення значення коефіцієнта відбиття падаючої хвилі H_{10} у хвилеводах при різній величині врахованих типів хвиль та кількості ітерацій при фіксованому значенні величини керуючого зсуву фаз.

Чисельні розрахунки виконувалися на ПЕОМ за допомогою ПЗ Octave 5.2.0 з конфігурацією CPU Intel Core i5-2500K 3,06 GHz, RAM DDR-III 8 Gb ОС Windows 7 SP1. Розрахунок виконувався для ФАР з параметрами $b/\lambda = 0.5714$, $b = a$. В табл. 1 показаний середній час розрахунку величини коефіцієнту відбиття у хвилеводі ФАР для фіксованого значення керуючого зсуву фаз $k \cdot b \cdot \sin\theta$ у діапазоні від 0 до $1/(2b)$ для числового алгоритму, що використовує вкладені суми.

Таблиця 1. Час рахунку величини коефіцієнту відбиття методом Шварца з використанням вкладених сум

i	Час рахунку (с), для величини M							
	2	4	6	8	10	12	14	16
2	0.0046674	0.026002	0.076338	0.17034	0.35435	0.59403	1.0041	1.2561
4	0.012667	0.072337	0.31002	0.5037	1.0497	1.9624	2.5865	3.7002
6	0.020334	0.11901	0.37102	0.82571	1.7288	2.9905	4.4576	6.243
8	0.028669	0.16634	0.50703	1.1371	2.3941	4.0846	6.2454	8.6435
10	0.036335	0.21535	0.65237	1.4921	3.2545	5.2963	7.7658	11.226
12	0.045003	0.26435	0.80771	2.0244	3.9522	6.5944	9.5782	13.539
14	0.054337	0.31002	0.95139	2.2905	4.4953	7.6041	10.91	16.014
16	0.064004	0.36202	1.1127	2.8652	5.265	8.8615	12.657	19.581
18	0.070671	0.41136	1.2484	3.0675	5.8497	10.057	14.172	23.059
20	0.079337	0.45369	1.3937	3.4462	6.5954	11.44	15.778	25.633

В табл. 2 показаний середній час розрахунку величини коефіцієнту відбиття для аналогічної структури із застосуванням числового алгоритму, що використовує матричні операції. Як видно з наведених результатів, для алгоритму метода Шварца представлення ітераційної послідовності у вигляді матричного рівняння дозволяє суттєво зменшити час розрахунку величини коефіцієнта відбиття. Так, наприклад, при $M = 16$ ($Q = 2M + 1$) і кількості ітерацій $i = 16$ запропонований підхід дозволяє обчислити величину коефіцієнта відбиття за час 0,389 секунди, в той час як алгоритм із застосуванням операцій вкладених сум дозволяє отримати результат за 19,581 секунд. При цьому, збільшення числа M в два рази збільшує час рахунку для запропонованого алгоритму в 4 рази, а для алгоритму із застосуванням вкладених сум — в 6 разів. Слід зазначити, що для запропонованого числового алгоритму кількість ітерацій слабо впливає на час рахунку, особливо при $M > 2$. Таким чином, при збільшенні числа врахованих типів хвиль переваги запропонованого підходу зростають.

Таблиця 2. Час рахунку величини коефіцієнту відбиття методом Шварца з використанням матричного представлення

i	Час рахунку (с), для величини M							
	2	4	6	8	10	12	14	16
2	0.0086006	0.027602	0.058203	0.099606	0.15241	0.22021	0.29782	0.38062
4	0.0086004	0.028602	0.058203	0.099606	0.15281	0.22261	0.29462	0.38182
6	0.0088006	0.030602	0.057803	0.10021	0.15361	0.22101	0.29482	0.39122
8	0.0080006	0.028002	0.059203	0.099406	0.15601	0.21441	0.29262	0.38622
10	0.0090004	0.028802	0.058203	0.10121	0.15461	0.22041	0.29702	0.38262
12	0.0092005	0.028602	0.060804	0.10081	0.15641	0.21561	0.29602	0.38782
14	0.0094004	0.028602	0.059003	0.10281	0.15421	0.22341	0.30022	0.38842
16	0.0098006	0.028201	0.060803	0.10241	0.15321	0.21681	0.29162	0.38902
18	0.0094006	0.029202	0.061204	0.10121	0.15701	0.21881	0.29202	0.38362
20	0.010001	0.028802	0.059603	0.10441	0.15701	0.22061	0.29722	0.38642

Для числових алгоритмів методу МЧПО перетворення у виразі (7) циклів підсумовування за індексами m в матричні операції для отримання матриці Δ також дозволяє скоротити час рахунку, що показано у табл. 3.

Таблиця 3. Час рахунку для різних варіантів числового алгоритму МЧПО

Вид алгоритму	Час рахунку (с), для величини M							
	2	4	6	8	10	12	14	16
Матричні операції	0.0086	0.0262	0.0534	0.0934	0.1446	0.2082	0.2816	0.3760
Вкладені суми	0.0148	0.0458	0.1148	0.2294	0.3918	0.6304	0.9491	1.6449

З табл. 3 видно, що для МЧПО, як і для методу Шварца, збільшення числа врахованих типів хвиль в два рази призводить до збільшення часу рахунку у приблизно 4 рази для алгоритмів з використанням матричних операцій і приблизно 6 разів для алгоритмів з використанням вкладених циклів.

Доцільно провести оцінку впливу числа врахованих типів хвиль на точність результатів, отриманих розглянутими методами. У табл. 4 показані значення модуля і фази коефіцієнта відбиття при $\sin\theta = 0.05$ для різних значень M , а також час рахунку цих значень при використанні запропонованих числових алгоритмів. Для методу Шварца кількість ітерацій, необхідна для отримання рішення з точністю 10^{-5} , склала $i = 15$.

Таблиця 4. Дослідження збіжності за кількістю врахованих типів хвиль для різних методів

M	Метод Шварца			МЧПО		
	Модуль	Фаза (град.)	Час рахунку (с)	Модуль	Фаза (град.)	Час рахунку (с)
2	0.34005	156.23	0.0070	0.34005	156.23	0.0100
4	0.34464	155.70	0.0320	0.34464	155.71	0.0300
6	0.34587	155.65	0.0570	0.34587	155.65	0.0600
8	0.34637	155.66	0.0950	0.34637	155.66	0.1100
10	0.34662	155.68	0.1430	0.34662	155.68	0.1730
12	0.34676	155.70	0.2070	0.34676	155.70	0.2390
14	0.34685	155.72	0.2870	0.34685	155.72	0.3210
16	0.34691	155.73	0.3960	0.34691	155.73	0.4270
18	0.34695	155.74	0.4680	0.34695	155.74	0.4800
20	0.34698	155.75	0.5870	0.34698	155.76	0.5790
22	0.34701	155.76	0.7480	0.34700	155.76	0.7300

Продовження таблиці 4

24	0.34702	155.77	0.8681	0.34702	155.77	0.8951
26	0.34704	155.78	1.1811	0.34704	155.78	1.0061
28	0.34705	155.79	1.2801	0.34705	155.79	1.1801
30	0.34706	155.79	1.4541	0.34706	155.79	1.3391
32	0.34706	155.80	1.5671	0.34706	155.80	1.5351

З табл. 4 видно, що збільшення числа врахованих типів хвиль веде до покращення точності результатів. Час рахунку при цьому пропорційний величині M^2 . Також, в ході чисельного експерименту було встановлено, що при досягненні певного значення подальше збільшення числа врахованих типів хвиль не призводить до підвищення точності результату. Таким чином, доцільно збільшувати число врахованих типів хвиль до тих пір, поки не будуть досягнуті задані вимоги по точності при збереженні прийняттого часу рахунку.

Висновки

1. В роботі виконано розвиток методу Шварца та МЧПО, який дозволив підвищити ефективність вказаних методів та спростити їх алгоритмізацію при розв'язанні задач дифракції електромагнітної хвилі на неоднорідностях у хвилеводних пристроях НВЧ.

2. Показано, що представлення ітераційної процедури методу Шварца і операцій із функціями Гріна у вигляді матричних арифметичних операцій дозволяє значно збільшити швидкість алгоритмів чисельного розрахунку для розглянутих методів.

Список використаної літератури

1. Свешников А. Г., Могилевский И. Е. Математические задачи теории дифракции: Учебное пособие. М.: Физический факультет МГУ, 2010. 196 с.
2. Deshpande M. D., Reddy C. J., Bailey M. C. Analysis of waveguide junction discontinuities and gaps using finite element method. *Electromagnetics*. 1998. Vol. 18. P. 81–97.
3. Moglie F., Rozzi T., Marozzi P. Wideband matching of waveguide discontinuities by FDTD methods. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 1994. Nov. Vol. 42, No. 11. P. 2093–2098.
4. Jin-fa-Lee, Palandech R., Mittra R. Modeling three-dimensional discontinuities in waveguides using nonorthogonal FDTD algorithm. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 1992. Feb. Vol. 40, No. 2. P. 346–352.
5. Patzelt H., Arndt F. Double-plane step in rectangular waveguides and their application for transformers irises and filters. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 1982. May. Vol. MTT-30, No. 5. P. 771–776.
6. Swanson D. G., Wolfgang J., Hoefer R. Microwave Circuit Modeling Using Electromagnetic Field Simulation. London: Artech House Boston, 2003. 488 p.
7. Sadiku M. Numerical Techniques in Electromagnetics. Second edition. Boca Raton, FL: CRC Press, 2001. 750 p.
8. Baronian V., Dhia A. S. B. B., Fliss S., Tonnoir A. Iterative methods for scattering problems in isotropic or anisotropic elastic waveguides. *Wave Motion*. 2016. July. Vol. 64. P. 12–33, 2016.
9. Gander M. J., Zhang H. Optimized Schwarz methods with overlap for the Helmholtz equation. *Domain Decomposition Methods in Sci. and Eng.: proceedings of 21st international conference (Rennes, France, June 25-29, 2012)*. Springer, 2014. P. 207–215.
10. Collino F., Ghaheni S., Joly P. Domain decomposition method for harmonic wave propagation: a general presentation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 2000. Apr. Vol. 184, Iss. 2–4. P. 171–211.
11. Gnatyuk M. A., Morozov V. M., Sjanov A. M. A Schwarz algorithm for three-dimensional diffraction problems. *Telecommunications and Radio Engineering*. 2015. Vol. 74, Issue 1. P. 1–8.

12. Гнатюк М. А., Морозов В. М., Марченко С. В. Дифракция электромагнитной волны на каскадном соединении прямоугольных волноводов. *Всеукраинский межведомственный научно-технический сборник Радиотехника*. Харьков, 2019. Вып.196. С. 130–137.
13. Марченко С. В., Морозов, В. М. Электродинамический расчет плоской волноводной ФАР методом пронизывающей области. *Вісті вищих учбових закладів. Радіоелектроніка*. 2009. Т.52(9), С. 41–47.
14. Миттра Р., Ли С. Аналитические методы теории волноводов: Пер. с англ. А. И. Плиса, под ред. Г.В. Воскресенского. М.: Мир, 1974. 327 с.
15. Захарія Й. А. Методи прикладної електродинаміки: Навч. посібник. Львів: «Бескид Біт», 2003. 352 с.
16. Шаров Г. А. Волноводные устройства сантиметровых и миллиметровых волн. Москва: Горячая линия-Телеком, 2016. 639 с.
17. Прохода И.Г., Дмитрюк С. Г., Морозов В.М. Тензорные функции Грина и их приложения в электродинамике СВЧ. Днепропетровск: ДГУ, 1985. 64 с.
18. Boisvert Ronald F. Mathematical software: past, present, and future. *Mathematics and Computers in Simulation*. 2000. Vol. 54, No. 4–5. P. 227–241.
19. Воскресенский Д. И., Гостюхин В. Л., Максимов В. М., Пономарев Л. И. Устройства СВЧ и антенны: Учебное пособие. Москва: Радиотехника, 2006. 376 с.
20. Amitay N., Galindo V., Wu C. Theory and analysis of phased array antennas. New York: Wiley-Interscience, 1972. 461 p.
21. Kantorovich L. V., Krylov V. I. Approximate methods of higher analysis. New York: Wiley-Interscience, 1964. 705 p.
22. Morozov V. M., Gnatyuk M. A. Phased antenna array analysis with Schwartz alternating method. *Вісник Дніпропетровського університету. Серія «Фізика. Радіоелектроніка»*. Дніпропетровськ, 2015. Том 23. Вип. 22. С. 132–141.
23. Математика. Её содержание, методы и значение / редкол.: А. Д. Александров и др. Москва: изд. Академии наук СССР, 1956. Т. 3. 336 с.

THE MATRIX REPRESENTATION OF THE SCHWARTZ ALTERNATING METHOD FOR SOLVING DIFFRACTION PROBLEMS
Gnatyuk M., Garkavenko I., Kononenko A.

Methods for solving electromagnetic problems are traditionally divided into analytical, direct numerical and numerical-analytical methods. Analytical methods allow obtaining an exact solution of the problem with closed form equations, but are applicable only to a limited class of problems; direct numerical methods are universal with regard to a structure under consideration, but demand significant computational resources. At the same time, numerical-analytical methods combine advantages the first two groups of methods, so their development is of interest.

The aim of this paper is to develop numerical-analytical methods for analyzing the process of electromagnetic wave diffraction in high frequency devices, namely: the Schwartz alternating method and the method of overlapping partial domains.

The application of the Schwartz alternating method and overlapping partial domains method to diffraction problems leads to the calculation of series in the form of sums limited by a finite number of terms of the series, which slows down numerical algorithms for these methods, and sometimes does not allow them to be used effectively. To overcome this limitation, authors propose the representation of operations with infinite series in the form of matrix operations. This approach has significantly reduced the performance time of numerical algorithms for the considered methods. The iterative procedure of the Schwartz method is represented as a recurrent expression with for unknown value of the reflection coefficient. Further, this expression is represented as a matrix equation, which is solved by iterative methods.

Thus, further development of the Schwartz alternating method and the method of overlapping partial domains for solving the electromagnetic wave diffraction problems is presented in this paper. Numerical algorithms, which allow increasing the efficiency of presented mathematical methods by increasing their performance and simplifying the algorithmization procedure, are proposed. As a result, the dependence of the performance time for the different variants of the considered methods is presented. It is shown that the advantages of the proposed approach are more significant in case of increasing the number of considered terms of the series, which can make the analysis of vector problems more efficient.

References

- [1] Sveshnikov A. G., & Mogilevskij I. E. (2010) *Matematicheskie zadachi teorii difrakcii: Uchebnoe posobie. [Mathematical problems in the theory of diffraction: Textbook.]* Moscow: Fizicheskij fakul'tet MGU. [in Russian]
- [2] Deshpande M. D., Reddy C. J., & Bailey M. C. (1998). Analysis of waveguide junction discontinuities and gaps using finite element method. *Electromagnetics*. 18, 81-97. [in English].
- [3] Moglie F., Rozzi T., & Marozzi P. (1994). Wideband matching of waveguide discontinuities by FDTD methods. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 42(11), 2093–2098. [in English]
- [4] Jin-fa-Lee, Palandech R., & Mittra R. (1992) Modeling three-dimensional discontinuities in waveguides using nonorthogonal FDTD algorithm. *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*. 40(2), 346–352. [in English]
- [5] Patzelt H., & Arndt F. (1982) Double-plane step in rectangular waveguides and their application for transformers irises and filters. *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* 30(5), 771–776. [in English]
- [6] Swanson D. G., Wolfgang J., & Hofer R. (2003) *Microwave Circuit Modeling Using Electromagnetic Field Simulation*. London: Artech House Boston. [in English]
- [7] Sadiku M. (2001) *Numerical Techniques in Electromagnetics. Second edition*. Boca Raton, FL: CRC Press. [in English]
- [8] Baronian V., Dhia A. S. B. B., Fliss S., & Tonnoir A. (2016) Iterative methods for scattering problems in isotropic or anisotropic elastic waveguides. *Wave Motion*. (64), 12–33. [in English]
- [9] Gander M. J., & Zhang H. (2012) Optimized Schwarz methods with overlap for the Helmholtz equation.: Proceedings of: “21st international conference “Domain Decomposition Methods in Sci. and Eng.” (pp. 207–215). Rennes, France: Springer. [in English]
- [10] Collino F., Ghameni S., & Joly P. (2000) Domain decomposition method for harmonic wave propagation: a general presentation. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 184 (2–4), 171–211. [in English]
- [11] Gnatyuk M. A., Morozov V. M., & Sjanov A. M. (2015) A Schwarz algorithm for three-dimensional diffraction problems. *Telecommunications and Radio Engineering*. 74(1). 1–8. [in English]
- [12] Hnatiuk M. A., Morozov V. M., & Marchenko S. V. (2019) Difraktsiya elektromagnitnoj volny na kaskadnom sojedinenii pryamougol'nykh volnovodov [The electromagnetic wave diffraction on a cascaded rectangular waveguide junction]. *Vseukrainskij mezhvedomstvennyj nauchno-tekhnicheskij sbornik Radiotekhnika – All-Ukrainian interdepartmental scientific and technical collection of Radio engineering*. 196, 130–137. [in Russian]
- [13] Marchenko S. V., & Morozov V. M. (2009) Elektrodinamicheskij raschet ploskoj volnovodnoj FAR metodom pronizyvayushchej oblasti. [Electrodynamic calculation of a plane waveguide PAA by the penetrating region method.] *Visti vishchih uchbovih zakladiv. Radioelektronika. – News of higher educational institutions. Radio electronics*. 52(9), 41–47. [in Russian]
- [14] Mittra R., Lee S. (1974) *Analiticheskie metody teorii volnovodov [Analytical methods of guided waves]* (A. I. Plis, Trans.) Moscow: Mir. [in Russian]
- [15] Zahariya J. A. (2003) *Metodi prikladnoï elektrodinamiki: Navch. posibnik. [Methods of applied electrodynamics: Textbook]* Lviv: « Beskid Bit ». [in Ukrainian]

- [16] Sharov G. A. (2016) *Volnovodnye ustrojstva santimetrovyh i millimetrovyh voln [Centimeter and Millimeter Wave Waveguide Devices]*. Moscow: Goryachaya liniya-Telekom. [in Russian]
- [17] Prohoda I.G., Dmitryuk S. G., & Morozov V.M. (1985) *Tenzornye funktsii Grina i ih prilozheniya v elektrodinamike SVCH [Tensor Green's functions and their applications in microwave electrodynamics]*. Dnepropetrovsk: DGU. [in Russian]
- [18] Boisvert Ronald F. (2000) Mathematical software: past, present, and future. *Mathematics and Computers in Simulation*. 54(4–5), 227–241. [in English]
- [19] Voskresenskij D. I., Gostyuhin V. L., Maksimov V. M., & Ponomarev L. I. (2006) *Ustrojstva SVCH i anteny: Uchebnoe posobie [Microwave devices and antennas: a textbook]*. Moscow: Radiotekhnika. [in Russian]
- [20] Amitay N., Galindo V., & Wu C. (1972) *Theory and analysis of phased array antennas*. New York: Wiley-Interscience. [in English]
- [21] Kantorovich L. V., & Krylov V. I. (1964) *Approximate methods of higher analysis*. New York: Wiley-Interscience. [in English]
- [22] Morozov V. M., & Gnatyuk M. A. (2015) Phased antenna array analysis with Schwartz alternating method. *Visnik Dnipropetrovs'kogo universitetu. Seriya «Fizika. Radioelektronika». Dnipropetrovs'k – Bulletin of Dnipropetrovsk University. Series "Physics. Radio electronics". Dnipropetrovsk*. 23(22), 132–141. [in English]
- [23] *Matematika. Eyo sodержanie, metody i znachenie. Mathematics. Its content, methods and meaning* (1956). A. D. Aleksandrov (Ed.) Moscow: izd. Akademii nauk SSSR, (Vol. 3). [in Russian]