

DOI: 10.31319/2519-8106.1(48)2023.280792
УДК 531.391

Калінін Є.І.¹, доктор технічних наук, професор,
Kalinin Evgeniy, Doctor of Technical Sciences, Professor
ORCID: 0000-0001-6191-8446
e-mail: kalinin@nubip.edu.com

Серєда Б.П.², доктор технічних наук, професор, завідувач кафедри автомобілів та автомобільне господарство
Sereda Borys, Doctor of Technical Sciences, Professor, Head Department of automobiles and automotive industry
ORCID: 0000-0002-9518-381X
e-mail: seredabp@ukr.net

Колєсник І.В.¹, кандидат технічних наук, доцент
Koliesnik Ivan, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor
ORCID: 0000-0003-4192-1773
e-mail: ivankolesnik@nubip.edu.ua

Романченко В.М.¹, кандидат технічних наук, доцент
Romanchenko Volodymyr, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor
ORCID: 0000-0002-0445-3125
e-mail: vromanchenko@nubip.edu.ua

¹Національний університет біоресурсів і природокористування України, м. Київ

¹National University of Bioresources and Nature Management of Ukraine, Kyiv

²Дніпровський державний технічний університет, м. Кам'янське

²Dniprovsky State Technical University, Kamianske

МАТЕМАТИЧНА МОДЕЛЬ КОЛИВАНЬ ДВОХОПОРНОЇ ЛАНКИ З РІВНОМІРНО РОЗПОДІЛЕНИМИ ПАРАМЕТРАМИ

MATHEMATICAL MODEL OF OSCILLATIONS OF A DOUBLE SUPPORT LINK WITH UNIFORMLY DISTRIBUTED PARAMETERS

У роботі розглядається ряд типових задач динаміки систем з пружними суміжними ланками та рухомими основами, що деформуються. Особлива увага приділяється особливостям динаміки таких систем по відношенню до систем на жорстких стаціонарних основах. Використовуються як точні аналітичні, так і наближені методи досліджень. Наведені результати розв'язання запропонованих моделей.

Ключові слова: динаміка; система; пружна ланка; основа, що деформується; жорсткість; прогин.

The development of modern mechanical engineering is a continuous increase in the productivity of designed and modernized machines due to forcing their working modes, on the one hand, and increasing technological loads, on the other. At the same time, the task of reducing material consumption and increasing the weight efficiency of machines was set and solved. A restraining beginning in the further development of research into systems with elastic adjacent links and movable deformed bases is the fact that well-established classical calculation schemes and their corresponding research methods in relation to systems of such a structure eventually exhaust themselves to some extent. Their further improvement is needed, as well as the development of new variants of calculation

schemes and research methods of such systems, which would take into account their main characteristic features more fully, at the level of new tasks that are constantly put forward by practice. This concerns, first of all, the formation of boundary conditions when solving relevant boundary problems. From the research carried out in this field, it is known that it is the supports with elastic elements (the material carriers of the boundary conditions of the task) that can have a decisive influence on both the frequency spectrum of the system and the course of associated oscillatory processes in it as a whole.

For systems on movable, deformable supports, the problem of investigating non-stationary oscillations becomes more complicated. Mathematical difficulties that arise in this case are largely due to the fact that non-stationary modes are described by non-periodic functions, as a result of which, from a formal point of view, the prospect of using such a powerful research apparatus, which is harmonic analysis, is lost or significantly complicated.

Therefore, the goal of the work is the synthesis of a mathematical model that will allow to study the dependence of the frequency spectrum of natural oscillations of links with distributed and concentrated parameters on the boundary conditions in a wide range of changes of the latter.

The problem of self-oscillations of a two-support link of constant cross-section on linear-elastic inertial supports without taking into account damping in the link material and in the supports itself is considered. The frequency equation of any frequency case of the idealized model with inertialess resistances is obtained. Note that the obtained results also allow solving the inverse problem, i.e. the problem of synthesizing the systems of the analyzed structure: given for some reasons the corresponding eigenvalues (or frequencies of eigenoscillations) of several first forms, it is possible to determine the values of certain parameters, and knowing their structure and examining the mutual dependence, to determine the very geometric and physical characteristics of the elements of the designed systems, taking into account their properties realized in dynamics.

Keywords: *dynamics, system, elastic link, deformable base, stiffness, deflection.*

Постановка проблеми

Розвиток сучасного машинобудування йде шляхом безперервного зростання продуктивності проєктованих і модернізованих машин за рахунок форсування їх робочих режимів, з одного боку, і збільшення технологічних навантажень, з іншого. Паралельно поставлено і вирішується завдання зниження матеріаломісткості та підвищення вагової ефективності машин.

Однчасне форсування робочих режимів машин і зниження відносної (на одиницю потужності) ваги їх ланок, а отже, і жорсткості останніх, неминуче веде до значного зростання динамічних навантажень у кінематичних ланцюгах та динамічної податливості останніх. В результаті в механізмах кожної такої машини у певних режимах розвиваються інтенсивні коливальні процеси, що визначають як справжні закони руху машини загалом, так і навантаження на її ланки. За наявності в кінематичному ланцюгу механізму не однієї, а кількох суміжних пружно-податливих ланок, як правило, виникають складні пов'язані коливання, вивчення яких і присвячена дана робота.

Аналіз останніх досягнень та публікацій

Основа сучасних фундаментальних досліджень у галузі механіки машин становлять, як правило, розв'язання відповідних крайових завдань математичної фізики [1, 4, 7, 12]. При цьому в якості основних моделей широко використовують так звані приведені (дискретні, континуальні, дискретно-континуальні) розрахункові схеми досліджуваних систем.

Стримуючим початком у подальшому розвитку досліджень систем з пружними суміжними ланками та рухомими деформованими основами є те, що добре відпрацьовані класичні розрахункові схеми та відповідні їм методи досліджень по відношенню до систем такої структури згодом певною мірою вичерпують себе. Потрібно їх подальше вдосконалення, а також розробка нових варіантів розрахункових схем і методів досліджень таких систем, які враховували б їх основні характерні особливості повніше, на рівні нових завдань, що безперервно висуваються практикою.

Це стосується насамперед формування граничних умов при вирішенні відповідних крайових завдань. З виконаних у цій галузі досліджень відомо, що саме опори з пружними елемен-

тами (матеріальні носії граничних умов завдання) можуть впливати визначальним чином як на частотний спектр системи, так і на перебіг у ній пов'язаних коливальних процесів в цілому.

У сучасній динаміці машин у зв'язку зі зростанням їхньої енергоозброєності та з інших причин істотне місце займають дослідження режимів руху [1, 4, 6], зокрема — проходження через резонанс [4, 5, 6, 9].

Формулювання мети дослідження

Для систем на рухомих опорах, що деформуються, проблема дослідження нестационарних коливань ускладнюється. Математичні труднощі, що виникають при цьому, значною мірою обумовлені тим, що нестационарні режими описуються неперіодичними функціями, внаслідок чого з формальної точки зору втрачається або помітно ускладнюється перспектива застосування такого потужного апарату досліджень, яким є гармонійний аналіз.

Тому, метою роботи є синтез математичної моделі, що дозволить вивчити залежності спектру частот власних коливань ланок з розповсюдженими та зосередженими параметрами від граничних умов в широкому діапазоні зміни останніх.

З точки зору постановки, організації та методики досліджень треба додати, що раціональне представлення, аналіз та узагальнення результатів досліджень, а також саме моделювання різних фізичних систем та процесів, що протікають в них, практично неможливо без систематичного застосування основних положень теорії подібності і динамічних аналогій, без вироблення відповідних критеріїв. Розв'язки всіх основних розглянутих далі завдань наводяться у вигляді функцій безрозмірних параметрів, які, в силу їх безрозмірності, можна розглядати як критерії подібності досліджуваних об'єктів і процесів, що протікають у них.

Тому метою роботи є синтез динамічної системи машинно-тракторного агрегату з двома вхідними впливами, що визначаються навантаженням на гаку та нерівностями рельєфу, і однією вихідною координатою, що визначається амплітудою коливань частоти обертання колінчастого валу двигуна.

Виклад основного матеріалу

Розглядається завдання про власні коливання двоопорної ланки постійного перерізу на лінійно-пружних інерційних опорах без урахування демпфування у матеріалі ланки та в самих опорах.

Нехай власні коливання досліджуваної ланки описуються диференціальними рівняннями виду:

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} + a^2 \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0; \quad a^2 = \frac{\mu l^4}{EI}, \quad (1)$$

де $y(x, t)$ — прогин ланки в перерізі з координатою x в довільний момент часу t ; EI — жорсткість ланки на вигин у тому ж перерізі; $\mu = \mu(x)$ — погонна маса ланки; l — довжина ланки.

Для ланки постійного перерізу, що закріплена кінцями в пружних опорах (рис. 1), розв'язок рівняння (1), який має вигляд

$$y(x, t) = Y(x)T(t) = [AS(\lambda x) + BT(\lambda x) + CU(\lambda x) + DV(\lambda x)]T(t), \quad (2)$$

має задовольняти крайовим умовам:

граничні умови (умови на опорах):

$$\text{при } x_0 = 0 \quad y_0'' = 0, \quad y_0''' + \bar{c}_0 y_0 + \bar{m}_0 \dot{y}_0 = 0; \quad \text{при } x_1 = 1 \quad y_1'' = 0, \quad y_1''' - \bar{c}_1 y_1 - \bar{m}_1 \dot{y}_1 = 0, \quad (3)$$

де $\bar{c}_j = c_j l^3 / EI$, $\bar{m}_j = m_j l^3 / EI$;

початкові умови:

$$y(x, 0) = y_0(x) = \varphi(x); \quad \dot{y}(x, 0) = \dot{y}_0(x) = \psi(x), \quad (4)$$

де $\varphi(x)$ та $\psi(x)$ — інтегровані в заданому проміжку функції.

Потрібно знайти і дослідити спектр власних значень λ_k та відповідні власні функції $Y_k = Y(\lambda_k x)$ за заданих умов, визначити деформації ланки у процесі власних коливань. Таким чином, маємо крайове завдання змішаного типу.

Традиційним шляхом, виходячи із задоволення рівняння (2) крайовим умовам (3) і (4), приходимо до системи лінійних рівнянь відносно постійних A, B, C, D наступного виду:

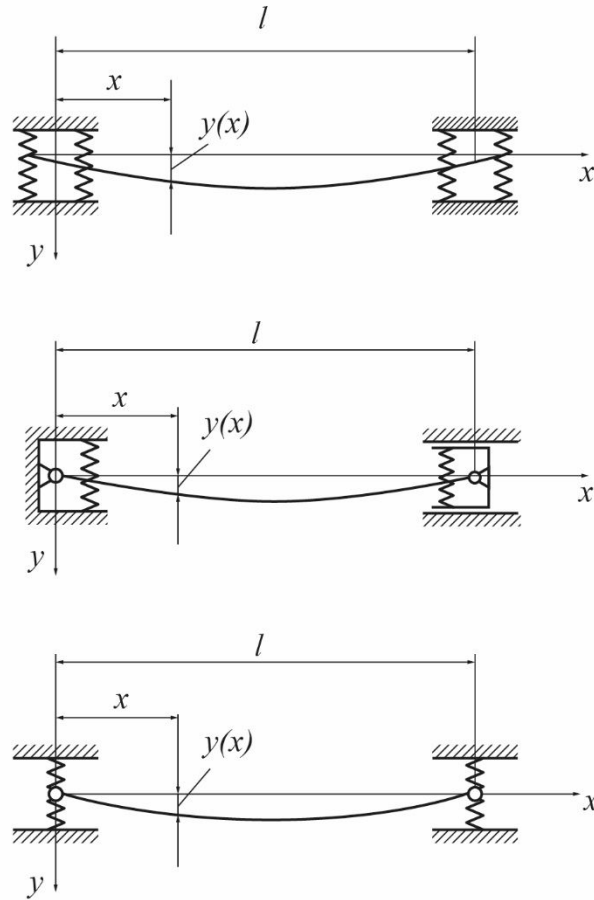


Рис. 1. Розрахункові схеми досліджуваних варіантів розміщення ланок на опорах, що деформуються

$$C = \zeta_0(\lambda)B;$$

$$D = \chi_0(\lambda)A;$$

$$A[U(\lambda) + \zeta_1(\lambda)V(\lambda)] + B[V(\lambda) + \zeta_1(\lambda)S(\lambda)] + C[S(\lambda) + \zeta_1(\lambda)T(\lambda)] + D[T(\lambda) + \zeta_1(\lambda)U(\lambda)] = 0;$$

$$A[T(\lambda) + \chi_1(\lambda)S(\lambda)] + B[U(\lambda) + \chi_1(\lambda)T(\lambda)] + C[V(\lambda) + \chi_1(\lambda)U(\lambda)] + D[S(\lambda) + \chi_1(\lambda)V(\lambda)] = 0; \quad (5)$$

$$\zeta_j = \frac{\alpha_j}{\lambda} - \gamma_j \lambda^3;$$

$$\chi_j = \delta_j \lambda - \frac{\beta_j}{\lambda^3}; j = 0, 1$$

і далі до частотного рівняння виду:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11}(\lambda) & a_{12}(\lambda) \\ a_{21}(\lambda) & a_{22}(\lambda) \end{vmatrix} = 0, \quad (6)$$

де

$$a_{11}(\lambda) = U(\lambda) + \zeta_1(\lambda)V(\lambda) + \chi_0[T(\lambda) + \zeta_1(\lambda)U(\lambda)];$$

$$a_{12}(\lambda) = V(\lambda) + \zeta_1(\lambda)S(\lambda) - \zeta_0[S(\lambda) + \zeta_1(\lambda)T(\lambda)];$$

$$a_{21}(\lambda) = T(\lambda) + \chi_1(\lambda)S(\lambda) + \chi_0[S(\lambda) + \chi_1(\lambda)V(\lambda)];$$

$$a_{22}(\lambda) = U(\lambda) + \chi_1(\lambda)T(\lambda) - \zeta_0[V(\lambda) + \chi_1(\lambda)U(\lambda)]. \quad (7)$$

Розкривши визначник у рівнянні (6), запишемо частотне рівняння досліджуваної системи у формі:

$$a_{11}(\lambda)a_{22}(\lambda) - a_{12}(\lambda)a_{21}(\lambda) = 0, \quad (8)$$

і у розгорнутому вигляді:

$$\begin{aligned} & \gamma_0\gamma_1\delta_0\delta_1D(\lambda)\lambda^{16} + \gamma_0\gamma_1(\delta_0 + \delta_1)A(\lambda)\lambda^{15} + \gamma_0\gamma_1S_1(\lambda)\lambda^{14} + (\gamma_0 + \gamma_1)\delta_0\delta_1B(\lambda)\lambda^{13} - \\ & - [(\beta_0\delta_1 + \beta_1\delta_0)\gamma_0\gamma_1D(\lambda) + (\gamma_0\delta_0 + \gamma_1\delta_1)E(\lambda) + (\gamma_0\delta_1 + \gamma_1\delta_0)C(\lambda)]\lambda^{12} - \\ & - [(\alpha_0\gamma_1 + \alpha_1\gamma_0)(\delta_0 + \delta_1) + (\beta_0 + \beta_1)\gamma_0\gamma_1 + \gamma_0 + \gamma_1]A(\lambda)\lambda^{11} - [(\alpha_0\gamma_1 + \alpha_1\gamma_0) + \delta_0\delta_1]S_1(\lambda)\lambda^{10} - \\ & [\alpha_0 + \alpha_1 + \delta_0 + \delta_1 + (\gamma_0 + \gamma_1)(\beta_0\delta_1 + \beta_1\delta_0)]B(\lambda)\lambda^9 + \{[1 + \alpha_0\alpha_1\delta_0\delta_1 + \beta_0\beta_1\gamma_0\gamma_1 + (\alpha_0\gamma_1 + \alpha_1\gamma_0) \times \\ & \times (\beta_0\delta_1 + \beta_1\delta_0)]D(\lambda) + (\alpha_0\delta_0 + \alpha_1\delta_1 + \beta_0\gamma_0 + \beta_1\gamma_1)E(\lambda) + (\alpha_0\delta_1 + \alpha_1\delta_0 + \beta_0\gamma_1 + \beta_1\gamma_0)C(\lambda)\}\lambda^8 + \quad (9) \\ & + [\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_0\alpha_1(\delta_0 + \delta_1) + (\alpha_0\gamma_1 + \alpha_1\gamma_0)(\beta_0 + \beta_1)]A(\lambda)\lambda^7 + (\alpha_0\alpha_1 + \beta_0\delta_1 + \beta_1\delta_0)S_1(\lambda)\lambda^6 + \\ & + [(\alpha_0 + \alpha_1)(\beta_0\delta_1 + \beta_1\delta_0) + \beta_0\beta_1(\gamma_0 + \gamma_1) + \beta_0 + \beta_1]B(\lambda)\lambda^5 - \{[\alpha_0\alpha_1(\beta_0\delta_1 + \beta_1\delta_0) + \beta_0\beta_1(\alpha_0\gamma_1 + \\ & + \alpha_1\gamma_0)]D(\lambda) + (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0)C(\lambda)\}\lambda^4 - \alpha_0\alpha_1(\beta_0 + \beta_1)A(\lambda)\lambda^3 - \beta_0\beta_1S_1(\lambda)\lambda^2 - \\ & - (\alpha_0 + \alpha_1)\beta_0\beta_1B(\lambda)\lambda + \alpha_0\alpha_1\beta_0\beta_1D(\lambda) = 0. \end{aligned}$$

Тут і далі величини:

$$\begin{aligned} A(\lambda x) &= ch\lambda x \sin \lambda x + sh\lambda x \cos \lambda x; \\ B(\lambda x) &= ch\lambda x \sin \lambda x - sh\lambda x \cos \lambda x; \\ C(\lambda x) &= 2ch\lambda x \cos \lambda x; \\ D(\lambda x) &= ch\lambda x \cos \lambda x - 1; \\ E(\lambda x) &= 2sh\lambda x \sin \lambda x; \\ S_1(\lambda x) &= 2sh\lambda x \sin \lambda x \end{aligned} \quad (10)$$

– частотні функції В. Прагера, а

$$\alpha_j = \frac{a_j l}{EI}; \quad \beta_j = \frac{c_j l^3}{EI}; \quad \gamma_j = \bar{m}_j \bar{\rho}_j^2 = \bar{I}_j; \quad \delta_j = \frac{m_j}{m} = \bar{m}_j; \quad \rho_j = \frac{\rho_j}{l} \quad (11)$$

– безрозмірні конструктивні параметри; m_j — приведена до j -го опорного перерізу маса; ρ_j — радіус інерції приведеної до j -го опорного перерізу маси; m — маса ланки; $j = 0, 1$.

З рівнянь (8) або (9) можна отримати будь-який частотний варіант, який нас цікавить, що відповідає конкретним граничним умовам більш вузького сенсу.

Так, для випадку пружного защемлення ланки, отримаємо:

$$\gamma_0\gamma_1D(\lambda)\lambda^8 + (\gamma_0 + \gamma_1)B(\lambda)\lambda^5 - (\alpha_0\gamma_1 + \alpha_1\gamma_0)D(\lambda)\lambda^4 - S_1(\lambda)\lambda^2 - (\alpha_1 + \alpha_0)B(\lambda)\lambda + \alpha_0\alpha_1D(\lambda) = 0, \quad (12)$$

або за симетричних граничних умов:

$$\gamma^2D(\lambda)\lambda^8 + 2\gamma B(\lambda)\lambda^5 - 2\alpha\gamma D(\lambda)\lambda^4 - S_1(\lambda)\lambda^2 - 2\alpha B(\lambda)\lambda + \alpha^2D(\lambda) = 0. \quad (13)$$

Для випадку пружного спирання:

$$\delta_0\delta_1S_1(\lambda)\lambda^8 + (\delta_0 + \delta_1)B(\lambda)\lambda^7 - D(\lambda)\lambda^6 - (\beta_0\delta_1 + \beta_1\delta_0)S_1(\lambda)\lambda^4 - (\beta_0 + \beta_1)B(\lambda)\lambda^3 + \beta_0\beta_1S_1(\lambda) = 0 \quad (14)$$

або за симетричних граничних умов:

$$\delta^2S_1(\lambda)\lambda^8 + 2\delta B(\lambda)\lambda^7 - D(\lambda)\lambda^6 - 2\beta\delta S_1(\lambda)\lambda^4 - 2\beta B(\lambda)\lambda^3 + \beta^2S_1(\lambda) = 0. \quad (15)$$

Результати розв'язку частотних рівнянь (13) і (15) у вигляді залежностей власних значень λ_k від пружних та інерційних параметрів опор α та β (безрозмірні критерії подібності досліджуваних конструкцій) та безрозмірних масових параметрів γ та δ зображені на рис. 2.

Якщо приведені величини m_j мас опор малі, то малі γ_j , δ_j . Нехтуючи цими величинами (приймавши $\gamma_j = \delta_j = 0$), з рівняння (9) отримуємо частотні рівняння для ланки на лінійно-пружних безінерційних опорах виду:

$$\begin{aligned} & D(\lambda)\lambda^8 + (\alpha_0 + \alpha_1)A(\lambda)\lambda^7 + \alpha_0\alpha_1S_1(\lambda)\lambda^6 + (\beta_0 + \beta_1)B(\lambda)\lambda^5 - [(\alpha_0\beta_0 + \alpha_1\beta_1)E(\lambda) + \\ & + (\alpha_0\beta_1 + \alpha_1\beta_0)C(\lambda)]\lambda^4 - \alpha_0\alpha_1(\beta_0 + \beta_1)A(\lambda)\lambda^3 - \beta_0\beta_1S_1(\lambda)\lambda^2 - \beta_0\beta_1(\alpha_0 + \alpha_1)B(\lambda)\lambda + \quad (16) \\ & + \alpha_0\alpha_1\beta_0\beta_1D(\lambda) = 0, \end{aligned}$$

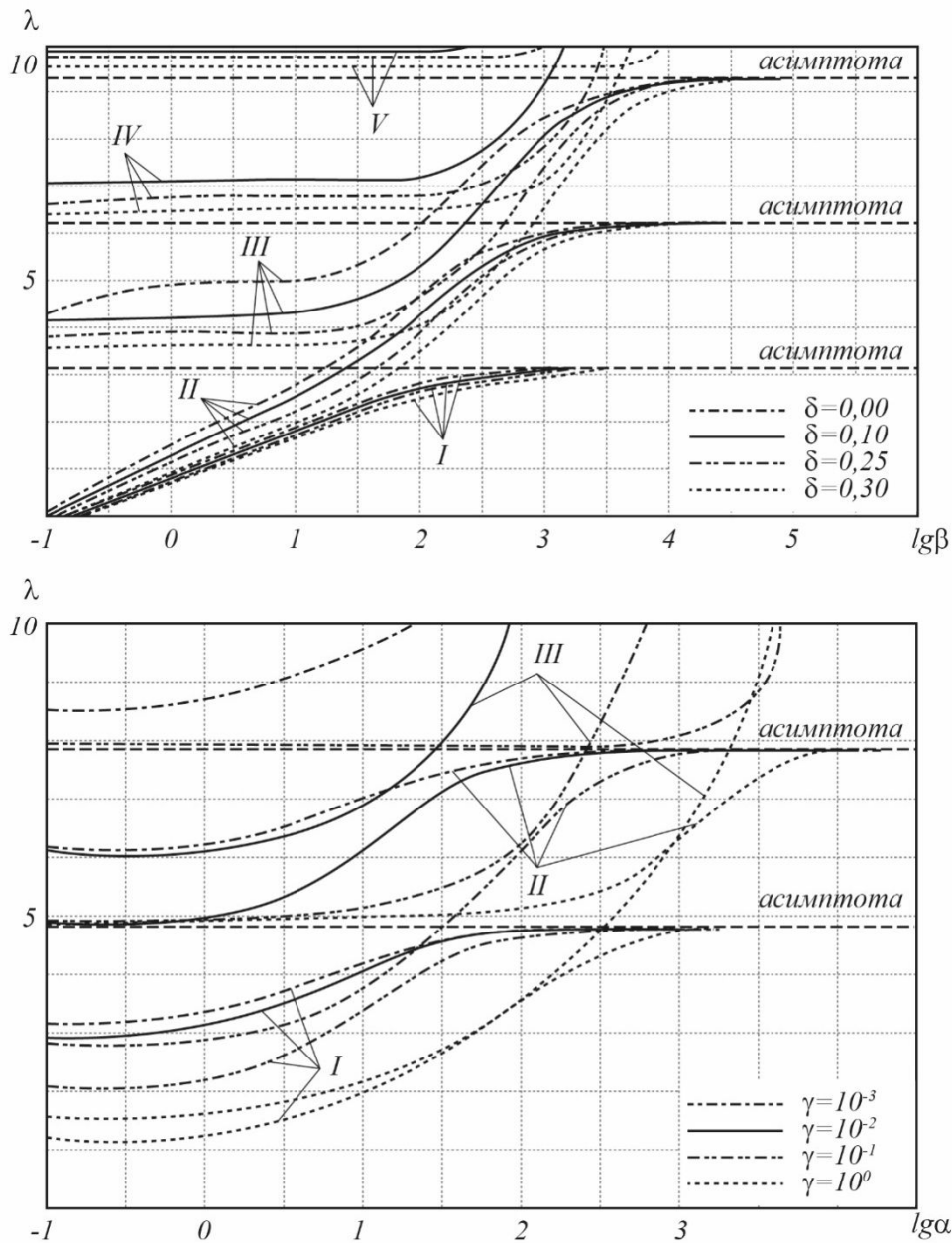


Рис. 2. Результати розв'язку частотних рівнянь

або за симетричних граничних умов:

$$D(\lambda)\lambda^8 + 2\alpha A(\lambda)\lambda^7 + \alpha^2 S_1(\lambda)\lambda^6 + 2\beta B(\lambda)\lambda^5 - 2\alpha\beta[E(\lambda) + C(\lambda)]\lambda^4 - 2\alpha^2\beta A(\lambda)\lambda^3 - \beta^2 S_1(\lambda)\lambda^2 - 2\alpha\beta^2 B(\lambda)\lambda + \alpha^2\beta^2 D(\lambda) = 0. \quad (17)$$

Звідси можна отримати частотне рівняння будь-якого частотного випадку ідеалізованої моделі з безінерційними опорами.

Результати розв'язання рівнянь (17) для випадку пружного спирання містяться на рис. 2 (криві, що відповідають граничному випадку $\delta = 0$).

Висновки

Знайшовши з рівнянь (9) діапазон власних значень λ_k (і, відповідно, частот p_k власних коливань), отримаємо можливість обчислити далі деформації ланки в процесі її власних коли-

вань. Для цього скористаємося загальним розв'язком $\tau_k(t) = \int_0^1 f(x,t)Y_k(x)dx / \int_0^1 Y_k^2(x)dx$ рівняння $y^{IV} + a^2\ddot{y} = f(x,t)$. Отримаємо:

$$y(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k(x)T_k^*(t), \quad (18)$$

де

$$Y_k(x) = A_k S(\lambda_k x) + B_k T_k(\lambda_k x) + C_k U(\lambda_k x) + D_k V(\lambda_k x) \quad (19)$$

– власні функції, що описують з точністю до постійного множника власні форми досліджуваної ланки, а

$$T_k^*(t) = L_k \cos p_k t + M_k \sin p_k t = N_k \sin(p_k t + \varphi_{k.o.}) \quad (20)$$

– функції часу, у яких $p_k = \sqrt{EI / (\mu l^4)}$ — частота власних коливань.

Зауважимо, що отримані результати дозволяють розв'язувати і зворотні завдання, тобто завдання синтезу систем аналізованої структури: задаючись з якихось міркувань відповідними власними значеннями λ_k (чи частотами p_k власних коливань) кількох перших форм, можна визначити значення параметрів α , β , γ та δ , а знаючи їх структуру і досліджуючи взаємні залежності, визначити самі геометричні і фізичні характеристики (μ , l , m , m_k , ...) елементів проєктованих систем з урахуванням їх властивостей, що реалізуються в динаміці.

Однак розв'язки (19) і (20), а отже і (18), записані поки що з точністю до деякого постійного множника, оскільки система (5) чотирьох рівнянь відносно чотирьох постійних A , B , C та D є невизначеною — містить п'ять шуканих величин — самі постійні і величину λ .

Для усунення цієї невизначеності запишемо рівняння (19) у такому вигляді:

$$y_k = \tilde{Y}_k(x)T_k^*(t) = A_k [S(\lambda_k x) + q_k T(\lambda_k x) + r_k U(\lambda_k x) + s_k V(\lambda_k x)]T_k^*(t), \quad (21)$$

а (21), відповідно, у такому вигляді:

$$y_k = \tilde{Y}_k(x)T_k^*(t) = \tilde{Y}_k (L_k^* \cos p_k t + M_k^* \sin p_k t) = \tilde{Y}_k N_k^* \sin(p_k t + \varphi_{k.o.}), \quad (22)$$

де $L_k^* = A_k L_k$; $M_k^* = A_k M_k$; $N_k^* = A_k N_k$.

Розв'язок (22) задовольняє заданим граничним умовам (3), але не задовольняє в загальному випадку початковим умовам (4).

Визначимо коефіцієнти L_k^* і M_k^* так, щоб розв'язок (22) задовольняв як граничним, так й початковим умовам. Продиференціювавши його за t , знайдемо:

$$\dot{y}(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} N_k^* p_k \tilde{Y}_k(x) \cos(p_k t + \varphi_{k.o.}). \quad (23)$$

Тепер з (22) і (23) при $t = t_0 = 0$, отримаємо:

$$y(x,0) = y_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} L_k^* \tilde{Y}_k(x) = \varphi(x); \quad (24)$$

$$\dot{y}(x,0) = \dot{y}_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k^* p_k \tilde{Y}_k(x) = \psi(x). \quad (25)$$

Формули (24) і (25) — суть розкладання функцій $\varphi(x)$ і $\psi(x)$ за власними функціями $\tilde{Y}_k(x)$ з невизначеними поки що коефіцієнтами L_k^* і M_k^* . Визначити дані коефіцієнти можна, скориставшись формулами Ейлера-Фур'є:

$$L_k^* = \frac{1}{I_k} \int_0^1 \varphi(x) \tilde{Y}_k(x) dx; \quad (26)$$

$$p_k M_k^* = \frac{1}{I_k} \int_0^1 \psi(x) \tilde{Y}_k(x) dx,$$

де $I_k = \int_0^1 \tilde{Y}^2(x) dx$, звідки:

$$M_k^* = \frac{1}{p_k I_{k0}} \int_0^1 \psi(x) \tilde{Y}_k(x) dx. \quad (27)$$

Підставивши значення L_k^* , M_k^* в (22), отримуємо розв'язок поставленої крайової задачі, який задовольняє тепер як граничним, так і початковим умовам даної задачі. Цей розв'язок дає змогу визначати деформацію ланки в будь-якій точці x у будь-який момент часу t .

Список використаної літератури

1. Khiem N., Lien T. 2001 A simplified method for natural frequency analysis of a multiple cracked beam. *Journal of Sound and Vibration*. Vol. 245(4). pp. 737–751. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.3585>.
2. Louyot M., Nennemann B., Monette C., Gosselin F. 2020 Modal analysis of a spinning disk in a dense fluid as a model for high head hydraulic turbines. *Journal of Fluids and Structures*. Vol. 94. pp. 102–108. <https://doi.org/10.1016/j.juidstructs.2020.102965>.
3. Arany L., Bhattacharya S., Adhikari S., Hogan S., Macdonald J. 2015 An analytical model to predict the natural frequency of offshore wind turbines on three-spring flexible foundations using two different beam models. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. Vol. 74. pp.40–45. <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2015.03.007>.
4. Калінін Є.І., Романченко В.М. 2016 Оцінка міцності при дії локального навантаження на попередньо напружену безмоментну оболонку. *Технічний сервіс агропромислового, лісового та транспортного комплексів*. №5. С. 167–172.
5. Калінін Є.І., Шуляк М.Л., Шевченко І.О. 2016 Дослідження перехідних процесів в коробці змінних передач мобільного енергетичного засобу. *Вісник ХНТУСГ ім. Петра Василенка*. Вип. 168. С. 73–79.
6. Sakar O., Sanliturk K. 2005 Elimination of transducer mass loading effects from frequency response functions. *Mechanical Systems and Signal Processing*. Vol. 19(1). pp. 87–104. [https://doi.org/10.1016/S0888-3270\(03\)00086-4](https://doi.org/10.1016/S0888-3270(03)00086-4).
7. Presas A., Valentin D., Egusquiza E., Valero C., Egusquiza M., Bossio M. 2017 Accurate determination of the frequency response function of submerged and confined structures by using PZT-patches. *Sensors*. Vol. 17(3). p. 660. <https://doi.org/10.3390/s17030660>.
8. Лебедев А.Т., Калінін Є.І. 2009 Оцінка можливості підвищення тягово-енергетичних властивостей машино-тракторного агрегату при виконанні орних робіт на агрофоні підвищеної вологості шляхом встановлення здвоєних шин. *Тракторна енергетика в рослинництві*. *Вісник ХНТУСГ ім. Петра Василенка*. Вип. 89. С. 37–45
9. Roeber J., Pitla S., Hoy R., Luck J., Kocher M. 2017 Development and validation of a tractor drawbar force measurement and data acquisition system (DAQ). *Applied Engineering in Agriculture*. Vol. 33(6). P. 781–789.
10. Cholodowski J., Dudzinski P., Ketting M. 2021 On the energy losses due to tracks vibrations in rubber track crawler vehicles. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. Vol. 21(2). P. 59.
11. Bloch A., Reyhanoglu M. and McClamroch N. 1992 Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol. 37. P. 1746–1757.
12. Bloch A. 2003 Nonholonomic Mechanics and Control. Springer Verlag, New York.
13. Bullo F. and Lewis A. 2004 Geometric Control of Mechanical Systems. *Applied Mathematics*. Vol. 49. P. 354–365.
14. Bullo F. and Lewis A. 2007 Reduction, linearization, and stability of relative equilibria for mechanical systems on riemannian manifolds. *Acta Applicandae Mathematicae*. Vol. 99(1). P. 53–95.
15. Bullo F. and Lewis A. 2004 Geometric Control of Mechanical Systems Modeling, Analysis and Design for Simple Mechanical Control Systems. Springer: New York. USA.

16. Crouch P. 1981 Geometric structures in systems theory. *IEEE Proceedings D (Control Theory and Applications)*. Vol. 128. P. 242–252. doi: 10.1049/ip-d.1981.0051
17. Isidori A. 1995 Nonlinear Control Systems. Springer Verlag. 3rd edition.

References

- [1] Khiem N., Lien T. 2001 A simplified method for natural frequency analysis of a multiple cracked beam. *Journal of Sound and Vibration*. Vol. 245(4). pp. 737–751. <https://doi.org/10.1006/jsvi.2001.3585>.
- [2] Louyot M., Nennemann B., Monette C., Gosselin F. 2020 Modal analysis of a spinning disk in a dense fluid as a model for high head hydraulic turbines. *Journal of Fluids and Structures*. Vol. 94. pp. 102–108. <https://doi.org/10.1016/j.juidstructs.2020.102965>.
- [3] Arany L., Bhattacharya S., Adhikari S., Hogan S., Macdonald J. 2015 An analytical model to predict the natural frequency of offshore wind turbines on three-spring flexible foundations using two different beam models. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*. Vol. 74. pp. 40–45. <https://doi.org/10.1016/j.soildyn.2015.03.007>.
- [4] Kalinin E.I., Romanchenko V.M. 2016 Otsinka mitsnosti pry dii lokalnoho navantazhennia na poperedno napruzheni bezmomentnu obolonku. *Tekhnichniy servis ahropromyslovoho, lisovoho ta transportnoho kompleksiv*. №5. S. 167–172.
- [5] Kalinin E.I., Shuliak M.L., Shevchenko I.O. 2016 Doslidzhennia perekhidnykh protsesiv v korobtsi zminnykh peredach mobilnoho enerhetychnoho zasobu. *Visnyk KhNTUSH im. Petra Vasylenka*. Vyp. 168. S. 73–79.
- [6] Cakar O., Sanliturk K. 2005 Elimination of transducer mass loading effects from frequency response functions. *Mechanical Systems and Signal Processing*. Vol. 19(1). pp. 87–104. [https://doi.org/10.1016/S0888-3270\(03\)00086-4](https://doi.org/10.1016/S0888-3270(03)00086-4).
- [7] Presas A., Valentin D., Egusquiza E., Valero C., Egusquiza M., Bossio M. 2017 Accurate determination of the frequency response function of submerged and confined structures by using PZT-patches. *Sensors*. Vol. 17(3). p. 660. <https://doi.org/10.3390/s17030660>.
- [8] Lebediev A.T., Kalinin E.I. 2009 Otsinka mozhlivosti pidvyshchennia tiahovo-enerhetychnykh vlastyvostei mashyno-traktornoho ahrehatu pry vykonanni ornykh robit na ahrofoni pidvyshchenoj volohosti shliakhom vstanovlennia zdvoienykh shyn. *Traktorna enerhetyka v roslunnytstvi*. *Visnyk KhNTUSH im. Petra Vasylenka*. Vyp. 89. S. 37–45.
- [9] Roeber J., Pitla S., Hoy R., Luck J., Kocher M. 2017 Development and validation of a tractor drawbar force measurement and data acquisition system (DAQ). *Applied Engineering in Agriculture*. Vol. 33(6). P. 781–789.
- [10] Cholodowski J., Dudzinski P., Ketting M. 2021 On the energy losses due to tracks vibrations in rubber track crawler vehicles. *Archives of Civil and Mechanical Engineering*. Vol. 21(2). P. 59.
- [11] Bloch A., Reyhanoglu M. and McClamroch N. 1992 Control and stabilization of nonholonomic dynamic systems *IEEE Transactions on Automatic Control*. Vol. 37. P. 1746–1757.
- [12] Bloch A. 2003 Nonholonomic Mechanics and Control. Springer Verlag. New York.
- [13] Bullo F. and Lewis A. 2004 Geometric Control of Mechanical Systems. *Applied Mathematics*. Vol. 49. P. 354–365.
- [14] Bullo F. and Lewis A. 2007 Reduction, linearization, and stability of relative equilibria for mechanical systems on riemannian manifolds. *Acta Applicandae Mathematicae*. Vol. 99(1). P. 53–95.
- [15] Bullo F. and Lewis A. 2004 Geometric Control of Mechanical Systems Modeling, Analysis and Design for Simple Mechanical Control Systems. Springer: New York. USA.
- [16] Crouch P. 1981 Geometric structures in systems theory. *IEEE Proceedings D (Control Theory and Applications)*. Vol. 128. P. 242–252. doi: 10.1049/ip-d.1981.0051
- [17] Isidori A. 1995 Nonlinear Control Systems. Springer Verlag. 3rd edition.