

DOI: 10.31319/2519-8106.2(49)2023.292638

УДК 534.44+621.391

**Головко Ю.М.**, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри прикладної математики  
**Holovko Yuri**, Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associate Professor, Department  
of Applied Mathematics

ORCID: 0000-0001-6081-8072

e-mail: holovko.yu.m@nmu.one, yngolovko@gmail.com

НТУ «Дніпровська політехніка», м. Дніпро  
NTU Dnipro Polytechnic, Dnipro

## СПЕКТРАЛЬНЕ ОЦІНЮВАННЯ ШИРОКОСМУГОВОГО ШУМОВОГО СИГНАЛУ ОБМЕЖЕНОЇ ТРИВАЛОСТІ

### SPECTRAL ESTIMATION OF A BROADBAND TIME-LIMITED NOISE SIGNAL

*Широкосмуговий шумовий сигнал моделювався пропусканням нормально розподіленої послідовності випадкових чисел через дискретний фільтр. Для сигналів обмеженої довжини визначалися спектральні щільності потужності, а у якості загальних характеристик розглядалися частоти максимумів та відношення екстремумів щільності. Досліджувався вплив вибіркової мінливості сигналу та параметрів спектрального оцінювання. Показано, що для того ж самого сигналу, зазвичай використовувані загальні характеристики змінюються в неприйнятно широких межах. Запропоновано будувати оцінки шумового сигналу на основі кумулятивної функції розподілу потужності. Значення цієї функції практично не змінюються при зменшенні числа періодограм, що осереднюються, і відповідному збільшенні частотної роздільної здатності. Це дозволяє використовувати один і той же спектр і для виявлення гармонійних складових і для оцінки характеристик шумового сигналу.*

**Ключові слова:** спектральне оцінювання, шум, дискретна фільтрація сигналів, сейсмоакустика.

*Research, monitoring and management of various processes are based on data obtained as a result of measurements. The results of the measurements usually contain noise, which is considering as interference. The values of the parameters of the noise component are necessary in order to reduce its influence on the measurement results. There are many situations when precisely the noise characteristics are the goal of measurements. When the properties of the signal are unknown in advance, the classical methods of spectral estimation are the most reliable. At the same time, the results of applying these methods significantly depend on a number of parameters. This dependence is most strongly manifesting at a limited signal duration.*

*The purpose of the paper is to build a model of a noise signal of mechanical origin and to study the influence of spectral estimation parameters on spectrally determined characteristics.*

*Modeling was performing in the MatLab software environment.*

*The noise signal was formed as a result of transformation of a normally distributed sequence of pseudorandom numbers by a discrete filter. The discrete filter was built according to the specified distribution of the power spectral density, which had a trapezoidal shape. The duration of all signals remained constant and amounted to 11,025 sampling periods.*

*Noise signals obtained at the output of the filter are using as data for spectral estimation. The direct (periodogram) method was using. It provides for the formation of a finite number of segments from the reports of the output signal, performing the Fourier transformation for each segment, squaring the modules of the obtained spectral reports (formation of periodograms) and their statistical averaging over all segments. The frequencies of spectrum maxima and the ratio of density extrema were considering as generalized characteristics. The effect of sample variability of the signal and the para-*

*meters of the spectral estimation was studding. In both cases, it is showing that for the same signal, the commonly used generalized characteristics vary in unacceptably wide ranges.*

*It is proposed to build estimates of the noise signal on the basis of the cumulative power distribution function and the mountain function. Graphs of these functions are given. It is shown that they practically do not change with a decrease in the number of average periodograms and a corresponding increase in the frequency resolution. This makes it possible to use the same spectrum both for the detection of harmonic components and for evaluating the characteristics of a noise signal.*

**Keywords:** *spectral estimation, noise, discrete signal filtering, seismic acoustics.*

### **Постановка проблеми**

Дослідження, моніторинг та управління різними процесами, як правило, ґрунтуються на даних, отриманих у результаті вимірів. Якщо величини, що вимірюються, змінюються з часом, то в більшості випадків результати вимірювань інтерпретуються як суперпозиція цільового (корисного) сигналу і шуму. Шум при цьому розуміється як перешкода з подальшим вживанням заходів щодо його пригнічення або, як мінімум, суттєвого зниження. При цьому вкрай важливо знати параметри саме шумової складової щоб зменшити її вплив на результати вимірів.

Можлива і інша ситуація, коли реєстровані данні за своєю суттю є шумом, характеристики якого і є ціллю вимірювань. Сам шумовий сигнал може як штучно створюватися з заданими характеристиками (для визначення передаточних властивостей систем, для передачі, маскування та захисту інформації), так і продукуватися якимось об'єктом чи системою, відображаючи їх властивості (оцінка якості електронних компонентів, діагностика стану машин та механізмів, моніторинг стану промислових об'єктів). Випадковий характер шумового сигналу обумовлює необхідність обчислення енергетичних характеристик за результатами аналізу спектральної щільності потужності. В ситуації наперед невідомих властивостей сигналу найбільш надійними є класичні методи спектрального оцінювання. Разом з тим ці методи, як і результати їх застосування, суттєво залежні від цілого ряду параметрів. Найбільш сильно така залежність проявляється при обмеженій тривалості сигналу.

Наведемо приклад, коли шумовий сигнал є домінуючим, а проблема пов'язана з неоднозначністю визначення його характеристик. Мова йде про сейсмоакустичний моніторинг стану шахтних виробок в умовах працюючих породоруйнівних агрегатів [1, 2]. Зазвичай, це широко-смуговий (ширина більше однієї октави) середньочастотний (від 100 Hz до 1500 Hz) шумовий сигнал механічного походження. Реєстровані коливання (шум) значно перевершують шум вимірювальної апаратури та шум квантування. Сигнал зазвичай містить детерміновані гармонійні компоненти, які можуть бути навіть первинними джерелами для реєстрованих сигналів, але за високого рівня шуму, явно не відбивається в часовому і частотному зображеннях сигналу. У цих умовах акустичний моніторинг проводиться з метою попередження небезпечних ситуацій і згідно з нормативно встановленими вимогами [3], виконується на основі характеристик спектрів сигналів, що реєструються. Надійність такого прогнозування на даний момент не є задовільною. Одна з причин вочевидь полягає у неоднозначності нормативних вимог щодо параметрів за якими саме виконуються обчислення спектрів та характеристик, на яких надалі і будуть прогнози заключення.

### **Аналіз останніх досліджень та публікацій**

Незважаючи на те, що методи спектрального оцінювання випадкових сигналів широко відомі і досить детально описані [4, 5], їх застосування до конкретних проблем, як правило, потребує допоміжних досліджень з урахуванням наявних особливостей. Це пов'язано з неоднозначним взаємовпливом параметрів побудови спектрів і необхідністю майже завжди приймання компромісних рішень. Це також обумовлює і появу нових публікацій за даною тематикою.

У книзі [6] розглянуті можливості використання шумових сигналів для виявлення латентних потенційно небезпечних змін у об'єктах спостереження. Показано, що при переході системи у небезпечний стан змінюється саме шумова компонента реєстрованого акустичного сигналу та ступень її кореляції з корисним сигналом. Спектральний аналіз займає значну частину досліджень, однак вплив його параметрів на результати не висвітлюються.

В огляді [7] узагальнені акустичні методи моніторингу промислових систем. З роботи випливає, що наразі найбільш швидко розвиваються методи, що використовують моделі глибинного навчання. При цьому методи обробки акустичних сигналів, які забезпечують первинні данні для глибинного навчання, ґрунтуються на адаптованих традиційних підходах до аналізу сигналу за часом та частотою. Причому спектральний аналіз залишається найбільш змістовним. Перелічуються роботи, де задовільні результати були отримані при застосуванні перетворення Фур'є коротких часових відрізків для нестационарних сигналів.

Акустичний моніторинг в околі ядерного реактора є предметом досліджень, що викладені у статті [8]. Застосовувався метод аналізу, який виявляє акустичні сигнали, замасковані шумом. Дослідження базувалися на вимірюваннях спектральної щільності потужності на всіх стадіях роботи реактора, включаючи стан перед та після запуску. Відмічається перерозподіл шумової потужності вдовж частотної вісі на різних стадіях роботи реактора, а також на різних відстанях до реактора.

У роботі [9], зокрема, аналізується придатність короткочасового перетворення Фур'є і безперервного вейвлет-перетворення, для встановлення частотних характеристик суттєво нестационарних шумоподібних сигналів перемикання перетворювача. Зроблено висновок, що обидва методи вважаються дієвими і взаємодоповнюють один одного, але значення параметрів при яких проведені обчислення наводяться лише частково, а доцільність використання саме таких значень параметрів не обґрунтовується.

#### Формулювання мети дослідження

Метою роботи є побудова моделі шумового сигналу механічного походження та дослідження впливу параметрів спектрального оцінювання на одержувані спектрально обумовлені характеристики.

#### Виклад основного матеріалу

На часовій залежності шум ідентифікується за наявності безладних непередбачуваних коливань. При низькому рівні шуму такі коливання трохи спотворюють основний тренд. При високому візуально спостерігаються лише безладні коливання. Явно стохастичний характер сигналів, що реєструються, обумовлює застосування для їх опису методів випадкових процесів. При моделюванні шумових сигналів, як правило, задаються лише одномірним законом розподілу щільності ймовірності: або рівномірним, або нормальним (гаусівським). Вочевидь, з огляду на центральну граничну теорему, другий варіант у загальному випадку здається більш обґрунтованим.

Як часова залежність, яка певною мірою відображає стохастичні властивості шуму, використовується автокореляційна функція. Перетворення Фур'є автокореляційної функції дає спектральну щільність потужності (PSD — power spectral density, спектр потужності), яка фактично містить ту ж інформацію про випадковий процес, але більш зручна для інтерпретації та аналізу. При моделюванні використовують моделі «кольорових» шумів, постулюючи залежності спектральної щільності від частоти у вигляді  $\frac{1}{\nu^k}$ , де  $\nu$  — частота, а  $k$  приймає різні значення для різних видів шуму. Найчастіше використовуваними є: білий шум ( $k=0$ ), рожевий або фліккер-шум ( $k=1$ ). Крім того, всі моделі припускають, що шумові сигнали є стаціонарними випадковими в широкому сенсі, що взагалі кажучи, і дозволяє отримувати спектральну щільність потужності, використовуючи фінітне перетворення Фур'є.

Розглядаються центровані дискретні сигнали з постійною частою дискретизації  $\nu_d$ . Далі застосовуються безрозмірні величини. Масштаби: частоти —  $\nu_d$ , часу —  $\frac{1}{\nu_d}$ . У безрозмірних величинах сигнали розглядаються як часові ряди з рівновіддаленими відліками, де номер відліку збігається з відповідним безрозмірним часом. Частота Найквіста дорівнює 0.5.

Моделювання полягало у формуванні дискретного шумового сигналу з властивостями, що задаються, визначенні спектра потужності і співставленні характеристик, обчислених на його основі при різних параметрах спектрального оцінювання. Вивчався вплив параметрів спектраль-

ного оцінювання на близькість отриманих і початкових (що задані) характеристик сигналів.

Моделювання проводилося в програмному середовищі MatLab компанії «The Math Works».

Шумовий сигнал формувався внаслідок перетворення нормально розподіленої послідовності випадкових чисел дискретним фільтром.

Використовувався абсолютно стійкий нерекурсивний фільтр. Побудова фільтра зводиться до знаходження відліків  $h_j, j = \overline{0, m}$  імпульсної характеристики, що є коефіцієнтами передавальної функції

$$H(z) = h_0 + h_1 z^{-1} + \dots + h_m z^{-m}$$

та частотної характеристики

$$H(v) = H(e^{i2\pi v}) = h_0 + h_1 e^{-2i\pi v} + \dots + h_m e^{-2i\pi v m},$$

де  $z$  — комплексна змінна,  $i$  — уявна одиниця,  $v$  — частота.

Амплітудно-частотна характеристика фільтра (FR — frequency response) задається у вигляді кусково-лінійної функції, визначеної в діапазоні частот від 0 до частоти Найквіста. Зворотне перетворення Фур'є цієї характеристики дає нескінченну періодичну послідовність відліків імпульсної характеристики. Центральний фрагмент послідовності довжиною  $m+1$  ( $m$  — порядок фільтра) відокремлюється з використанням плавно спадаючої до кінців вагової функції (вікна), що дозволяє для частотної характеристики зменшити як коливання в смузі пропускання так і рівень пелюсток в смузі затримання. Описаний алгоритм реалізований в середовищі Matlab як функція `fir2`, результатом роботи якої є вектор значень відліків імпульсної перехідної функції (коефіцієнтів нерекурсивного фільтра).

Відфільтрований сигнал отримується в результаті дискретної згортки сигналу, що фільтрується, і коефіцієнтів фільтра. Ця процедура виконувалася за допомогою функції `filter`.

Зв'язок між односторонніми спектральними щільностями сигналу  $G_{in}(v)$ , що надходить на вхід лінійного фільтра, і шумового сигналу  $G(v)$  на виході фільтра має вигляд [10]:

$$G(v) = |H(v)|^2 G_{in}(v).$$

Враховуючи, що для стаціонарних шумових сигналів спектральна фаза випадкова і не несе жодної інформації, фільтр будуватимемо задаючи спектральну щільність потужності шумового сигналу  $G(v)$ . Тоді необхідна відповідно до викладеної вище методики для побудови фільтра FR буде:

$$|H(v)| = \sqrt{\frac{G(v)}{G_{in}(v)}}. \quad (1)$$

Для шумового сигналу PSD задавалася у трапецеподібному вигляді:

$$G_{tr}(v) = \begin{cases} 0, & 0 \leq v < v_1^F; \\ \frac{v - v_1^F}{v_2^F - v_1^F}, & v_1^F \leq v < v_2^F; \\ 1, & v_2^F \leq v < v_3^F; \\ \frac{v - v_4^F}{v_3^F - v_4^F}, & v_3^F \leq v < v_4^F; \\ 0, & v_4^F \leq v < \frac{1}{2}, \end{cases} \quad (2)$$

де  $v_i^F, i = \overline{1, 4}$  — задані частоти (див. рис. 1а).

Застосовуючи до (2) зворотне перетворення Фур'є, отримуємо відповідну автокореляційну функцію:

$$K_{tr}(t) = \frac{1}{2} \left[ \int_{-v_2^F}^{-v_1^F} \frac{-v - v_1^F}{v_2^F - v_1^F} e^{i2\pi vt} dv + \int_{v_1^F}^{v_2^F} \frac{v - v_1^F}{v_2^F - v_1^F} e^{i2\pi vt} dv + \int_{-v_3^F}^{-v_2^F} e^{i2\pi vt} dv + \right. \\ \left. + \int_{v_2^F}^{v_3^F} e^{i2\pi vt} dv + \int_{-v_4^F}^{-v_3^F} \frac{-v - v_4^F}{v_3^F - v_4^F} e^{i2\pi vt} dv + \int_{v_3^F}^{v_4^F} \frac{v - v_4^F}{v_3^F - v_4^F} e^{i2\pi vt} dv \right] = \\ = \frac{\Delta_2 \sin(\pi\Delta_3 t) \sin(\pi\Delta_4 t) - \Delta_4 \sin(\pi\Delta_1 t) \sin(\pi\Delta_2 t)}{2\pi^2 \Delta_2 \Delta_4 t^2},$$

де  $\Delta_1 = v_1^F + v_2^F$ ;  $\Delta_2 = v_2^F - v_1^F$ ;  $\Delta_3 = v_3^F + v_4^F$ ;  $\Delta_4 = v_4^F - v_3^F$ .

На рис. 1b наведені безрозмірні кореляційні залежності. В якості масштабу бралася величина  $\frac{1}{2}(\Delta_3 - \Delta_1) = \frac{1}{2}(v_4^F + v_3^F - v_1^F - v_2^F)$ , що є дисперсією (потужністю) шумового сигналу.

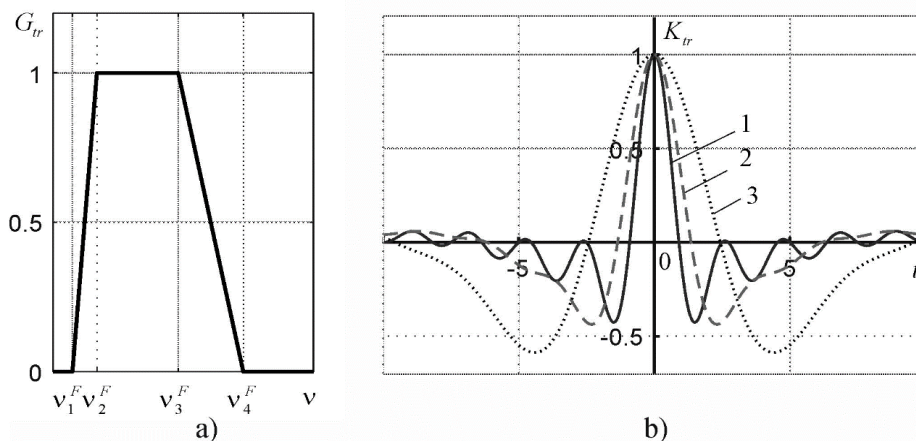


Рис. 1. Загальний вид спектральної щільності потужності (a) і автокореляційні функції (b) шумового сигналу при: 1 —  $v_1^F = 0.05$ ,  $v_2^F = 0.1$ ,  $v_3^F = 0.45$ ,  $v_4^F = 0.5$ ; 2 —  $v_1^F = 0.05$ ,  $v_2^F = 0.1$ ,  $v_3^F = 0.15$ ,  $v_4^F = 0.4$ ; 3 —  $v_1^F = 0.05$ ,  $v_2^F = 0.06$ ,  $v_3^F = 0.07$ ,  $v_4^F = 0.2$

Вхідний сигнал фільтра — білий гаусівський шум генерувався функцією `randn`. У цій функції використаний алгоритм отримання послідовності псевдовипадкових чисел, описаний у книзі [11]. Алгоритм характеризується зневажливо малою відмінністю від теоретичного розподілу ймовірностей і великим періодом повторення. Теоретичне математичне очікування генерованої послідовності дорівнює 0, дисперсія  $D=1$ , а спектральна щільність потужності  $G_{noise}(v) = 2D = 2$  (у розмірних величинах:  $G_{noise}(v) = \frac{D}{\left(\frac{v_d}{2}\right)} = \frac{2}{v_d}$ ). Враховуючи останнє спів-

відношення, формула (1) для завдання частотної характеристики фільтра набуває вигляду:  $|H(v)| = \sqrt{\frac{G(v)}{2}}$ . Побудовані за цією FR фільтри, забезпечують теоретичний збіг PSD з заданим по (2). Зокрема,  $G(v) = 1$  при  $v \in (v_2^F, v_3^F)$  на виході фільтра.

Отримані на виході фільтра шумові сигнали використовуються як дані для спектрального оцінювання.

Для визначення PSD застосовувався так званий прямий (періодограмний) метод, що передбачає формування кінцевого числа сегментів з відліків вихідного сигналу, виконання перетворення Фур'є для кожного сегмента, зведення в квадрат модулів отриманих спектральних відліків (формування періодограм) та їх статистичне осереднення по всіх сегментах.

Основними характеристиками дискретних спектрів є розділення за частотою та статистична спроможність отримуваних значень PSD. Вони безпосередньо залежать від наступного:

- повна довжина сигналу (загальна кількість відліків);
- число відліків у сегменті;
- вид вікна, що згладжує;
- величина зсуву сегментів щодо один одного;
- число доданих до сегменту нульових відліків.

Нижче розглянуто кожен із зазначених параметрів у контексті моделювання шумового сигналу із зазначенням вибраних числових значень.

Загальна довжина сигналу, що відповідає спектру, повинна бути такою, щоб на всьому її протязі сигнал можна було вважати стаціонарним ергодичним у широкому сенсі [10]. У багатьох випадках сигнали суттєво нестаціонарні та принципово неповторні (наприклад, через процеси руйнування). У такій ситуації щоб застосувати класичні методи спектрального оцінювання потрібно встановити або допустити існування часового інтервалу довжиною  $T_{ob}$ , протягом якого виконуються умови квазістаціонарності (практично, ці умови зводяться до обмеження на допустимі відхилення середнього значення та дисперсії [4]). Розмір інтервалу може визначатися на основі апіорних даних або фізичних міркувань, а краще за результатами спостережень у конкретних умовах. Але в будь-якому випадку при спектральному оцінюванні така величина явно чи неявно враховується.

Загальна кількість відліків на інтервалі квазістаціонарності (довжина сигналу):  $N_{ob} = T_{ob} + 1$  ( $T_{ob}$  безрозмірне). Для всіх аналізованих далі сигналів значення  $N_{ob}$  приймалося одним і тим самим і рівним 11026 відліків. У розмірних величинах при частоті дискретизації 11025 Hz це відповідає довжині часового проміжку рівного 1 s.

Для розрахунку періодограм сегментів застосовується швидке перетворення Фур'є (FFT-FastFourierTransform), що визначає число відліків  $N = 2^k$ , де  $k \in \mathbb{N}$  на сегмент. Інше обмеження, яке необхідно враховувати при виборі довжини сегмента пов'язане з шириною частотної смуги (біна) у спектрі та з роздільною здатністю піків. Загальне правило полягає в тому, що довжина сегмента повинна не менше ніж у два рази перевищувати зворотню величину різниці частот піків. Хоча при моделюванні суто шумового сигналу необхідності розрізнення піків немає, у реальних сигналах така проблема майже завжди присутня. Тому приймалося, що ширина біна має бути не більше 0.004. Розрахунки виконувались за  $N$  рівного 256, 512 і 1024 відліків.

Основна мета застосування попередньої віконної обробки сигналу полягає у зменшенні розтікання спектральних оцінок. Вплив вікна визначається виглядом його дискретно-часового перетворення Фур'є. Ширина головного пелюстка перетворення вікна обмежує ширину спектральних піків, що ідентифікуються, а рівень бічних пелюстків визначає ступінь спотворення сусідніх спектральних піків і разом зі швидкістю спадання бічних пелюстків визначає ступінь розтікання потужності по спектру. Застосування прямокутного вікна, що має найменшу ширину головного пелюстка, призводить до деякого зростання викидів значень PSD, зумовлених випадковим характером сигналу. В іншому, при плавній зміні теоретичної кривої щільності потужності, різниця у спектрах, одержуваних при різних видах вікон, нехтовно мала. Даний висновок був підтверджений експериментально і при подальших розрахунках застосовувалося тільки вікно Хеммінга, у якого ширина головного пелюстка 1.36 біну, максимальний рівень бічних пелюстків — 43 dB і асимптотична швидкість спадання — 6 dB/октаву [6].

При розташуванні сегментів один за одним уздовж усього часового ряду довжиною  $N_{ob}$ , вибір числа відліків, віднесених до кожного сегмента  $N$  визначає число екземплярів спектрів по яких далі проводиться осереднення і, відповідно, визначаються довірчі інтервали для значень

спектральної щільності потужності. Зменшення  $N$  призводить до збільшення числа фрагментів і, відповідно, зменшення довірчих інтервалів спектральної щільності потужності, тобто поліпшення оцінок у статистичному сенсі. Однак при цьому ширина біна, що дорівнює  $\Delta\nu = \frac{1}{N}$ , збільшується, тобто погіршується роздільна здатність по частоті. Збільшення  $N$ , навпаки, зменшує крок по частоті, а число усереднених спектрів і спроможність оцінок знижується.

Для зменшення дисперсії оцінок використовується збільшення числа сегментів шляхом їх перекриття (метод Уелча). Однак радикально збільшити спроможність оцінок таким чином не можна. Як виявилось при детальному дослідженні [4] мінімальна дисперсія досягається коли перекриття близьке до 0.5. Вибір такого рівня перекриття також забезпечує рівноправний облік всіх відліків крім  $\frac{N}{2}$  відліків на початку та наприкінці всього сигналу. Число спектрів, що при

цьому осереднюються дорівнює  $\frac{2N_{ob}}{N} - 1$  (в умовах FFT) або  $2 \left\lfloor \frac{N_{ob}}{N} \right\rfloor - 1$  (при довільному  $N$ ).

Формальне підвищення роздільної здатності за частотою може бути отримано додаванням нульових відліків до вже зважених віконом  $N$  відліків сегмента. Враховуючи особливості FFT зручно отримувати новий подовжений сегмент завдовжки  $2^k N$ , де  $k \in \mathbb{N}$ . Додавання нульових відліків дозволяє деталізувати структуру спектра завдяки інтерполяції спектральних значень усередині базових (отриманих за  $N$  відліками) частотних проміжків. Цей прийом застосовується надалі. У той же час, додавання нулів не збільшує реальну роздільну здатність PSD, а всі проміжні спектральні відліки є корельованими, на відміну від відліків базових частот [12].

Таким чином, перекриття сегментів і додавання нулів не усуває необхідність прийняття компромісу між роздільною здатністю і статистичною спроможністю. Фактично такий вибір робиться виходячи з цілей подальшого аналізу.

У багатьох випадках важливою є інформація про перерозподіл потужності коливань, що ресструються, в частотному інтервалі сигналу. В якості характеристики такого перерозподілу часто застосовується відношення екстремальних значень спектральної щільності на різних ділянках спектру ( $m_{21}$ ) та частота найбільшого значення спектральної щільності ( $\nu_m$ ) [1,2,3]. Дані величини і розподіл потужності за частотою будуть основними характеристиками, що надалі оцінюються.

На рис. 2 наведені спектри сигналів, отриманих в результаті пропускання білого гаусівського шуму через фільтр, побудований за  $G_{\nu}(\nu)$  з параметрами:

$$\nu_1^F = 0.1; \nu_2^F = 0.15; \nu_3^F = 0.25; \nu_4^F = 0.3. \quad (3)$$

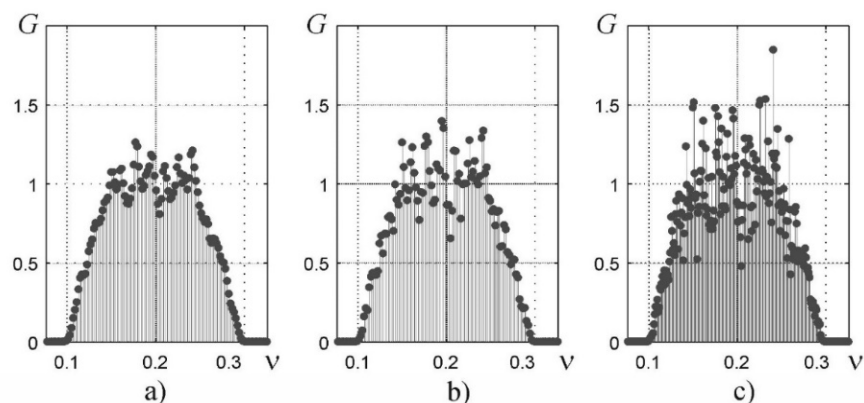


Рис. 2. Спектральні щільності потужності одного й того сигналу, отримані при різних довжині сегментів: а)  $N = 256$  (+256 нульових відліків); б)  $N = 512$ ; в)  $N = 1024$

Всі три спектри на рис. 2 отримані для одного і того ж екземпляра випадкової послідовності. При  $N = 256$  спектр отримано при збільшеній удвічі довжині сегментів за рахунок додавання нульових відліків. Кількості осереднених періодограм дорівнювали 85, 41 і 19 для  $N = 256$ ; 512; 1024 відповідно. Отримані при рівні надійності 0.9 довірчі інтервали при  $N = 256$  не перевищували 0.5 в точках локальних екстремумів. При  $N = 1024$  для окремих значеннях PSD довірчі інтервали перевищували значення 1.5. На графіках довірчі інтервали не показані, щоб не захарашувати спектри.

При збільшенні довжини сегмента число осереднених спектрів зменшується і вибіркоче стандартне відхилення для шуму зростає пропорційно  $\sqrt{N}$ , що візуально відображається у вигляді відповідно зростаючої порізаності кривої PSD. При  $N = 1024$  спостерігається навіть «викид», який без урахування спектрів з меншим розділенням можна було б трактувати як прояв наявності гармонійної складової. Формальне визначення частот максимумів  $\nu_{\max}$  дає суттєво різні значення для різних довжин сегмента FFT:  $\nu_{\max} = 0.179$ ; 0.195; 0.241 при  $N = 256$ ; 512; 1024 відповідно. Помітно відрізняються і відношення екстремальних значень PSD:  $m_{21} = 0.959$ ; 0.956; 0.826.

Якщо довжина сегмента залишається незмінною, то вже вибіркоче мінливість шумового сигналу є причиною варіацій значень PSD. На рис. 3 показані спектри, отримані при одній і тій же довжині сегмента  $N = 512$  трьох різних екземплярів шумового сигналу. Частоти, на яких досягаються максимальні значення PSD:  $\nu_{\max} = 0.207$ ; 0.143; 0.256. Відносини максимумів PSD:  $m_{21} = 0.751$ ; 0.994; 0.984.

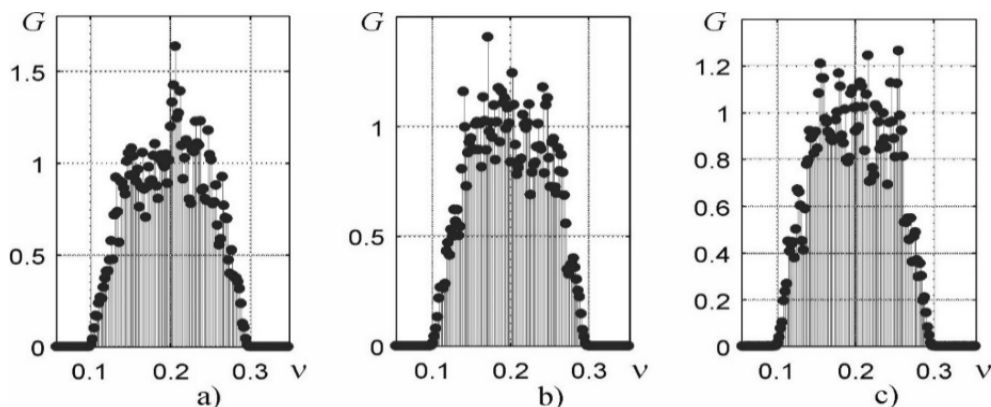


Рис. 3. Спектральні щільності потужності для трьох різних реалізацій сигналу і однаковою довжиною сегмента ( $N = 512$ )

З даних на рис. 2 і 3 випливає, що відмінності частот максимумів PSD і відношення максимумів PSD такі значні, що дані величини не можуть використовуватися як характеристики сигналів. Доказом є і рис. 4а. Тут наведені дані обчислені за спектрами, отриманими шляхом пропускання через один і той же фільтр з параметрами (3) двадцяти нормально розподілених сигналів, що були підряд створені генератором псевдовипадкових послідовностей. Для кожного генерованого сигналу розрахунки проводилися при трьох різних довжинах сегмента FFT. По вісі абсцис відкладені частоти, а по вісі ординат відношення екстремумів PSD ( $m_{21}$ ). Різні види міток відносяться до різних довжин сегментів  $N$ . Мітки, що розташовані по вісі ординат вище 1 відносяться тільки до вісі частот і вказують положення максимумів PSD ( $\nu_{\max}$ ) на вісі частот.

Можна відзначити майже суцільне заповнення даними мітками відрізків пропускання фільтра для всіх трьох довжин сегментів. Тобто, контрольовані характеристики, обчислені на основі спектрів, отриманих за теоретично однаковими сигналами, мають суттєво різні значення.



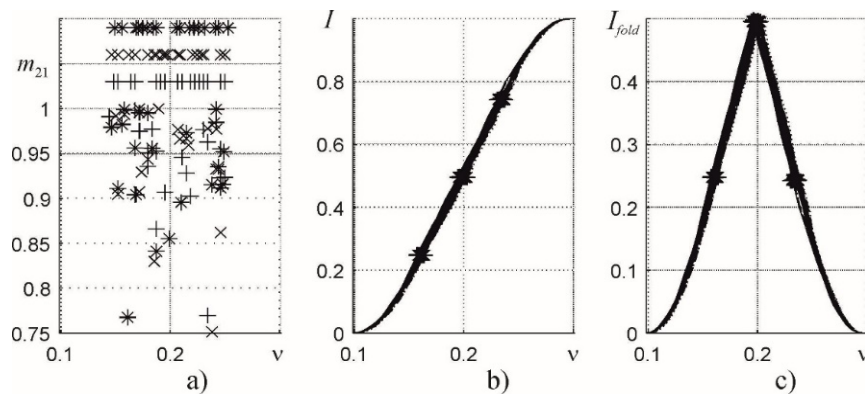


Рис. 4. Дані, що отримані за спектрами 20-и шумових сигналів: а — відношення екстремумів PSD та частоти найбільших значень PSD; б — кумулятивна функція розподілу потужності; с — складений кумулятивний розподіл потужності; "+" —  $N = 256$ ; "x" —  $N = 512$ ; "\*" —  $N = 1024$

Зрозуміло, що спостережувана варіативність характерних спектрів обумовлена недостатньою довжиною сигналу, який доступний для спектрального оцінювання. Якщо б сигнал задовольняв умовам ергодичності протягом значно більшого проміжку часу, то осереднення за значно більшим числом періодограм стабілізувало б параметри спектрів. Але в умовах малої тривалості проміжку для ідентифікації сигналів бажано мати інші більш стійкі як у відношенні параметрів побудови оцінки (зміни довжини сегментів), так і у відношенні виборчої мінливості сигналу.

Як очевидний підхід у даній ситуації можна вжити кумулятивну функцію розподілу (CDF — cumulative distribution function), що обчислюється за значеннями PSD:

$$I(\nu) = \sum_{i=1, \frac{N}{2}} G(\nu_i) 1_{\nu}(\nu_i),$$

де  $1_a(x) = \begin{cases} 1, & x \leq a; \\ 0, & x > a \end{cases}$  — індикаторна функція.

Функцію  $I(\nu)$  потрібно інтерпретувати як потужність складових сигналу з частотою, що не перевищує  $\nu$ .

На рис. 4б наведено залежності кумулятивної функції від частоти, що отримані за тими самими PSD, що і дані на рис. 4а, тобто на графіку рис. 4б нанесено шістьдесят кривих. Тіми ж мітками, що і на рис. 4а відзначені 0.25-, 0.5- та 0.75-квантили потужності. Близькість квантилей і кривих дозволяє сподіватися, що на основі такої залежності можуть бути отримані характеристики більш робастні і стійкі по відношенню до параметрів спектрального оцінювання. Функція  $I(\nu)$  ідентична кумулятивній функції розподілу ймовірностей і, отже, ґрунтуючись на  $I(\nu)$ , методи, що розвинені в теорії ймовірностей та математичній статистиці [13], можна застосувати для порівняння вибірових та еталонних функцій або тестування близькості двох вибірових функцій. Для візуалізації інтегральних характеристик спектрів (медіани, асиметрії, відхилень від медіани) можна використовувати складений кумулятивний розподіл (гірський графік) [14], що може бути обчислений за формулою:

$$I_{fold}(\nu) = I(\nu) 1_{0.5}[I(\nu)] + [1 - I(\nu)] \{1 - 1_{0.5}[I(\nu)]\}.$$

Дана функція, однозначно пов'язана з  $I(\nu)$  і, звичайно, також слабо залежить від вибірової мінливості шумового сигналу та довжини сегмента FFT. Це ілюструє і рис. 4с де зображені 60 кривих, побудованих за тими ж спектрами, що і графіки на рис. 4а та 4б.

Інтегральний характер функцій  $I(\nu)$  і  $I_{fold}(\nu)$  визначає доцільність їхнього використання з метою оцінки саме широкосмугових шумових сигналів. Окремі піки в PSD нехтовно слаб-

ко відбиваються на вигляді цих функцій. Аналогічний вплив мають і гармонійні складові із су-  
мірною потужністю на бін і частотами, що потрапляють в інтервал шумового сигналу. Взагалі,  
для ідентифікації гармонійних складових потрібно використовувати довгі сегменти. При цьому  
відповідні піки чіткіше виявляються на графіку PSD, а статистична спроможність значень PSD  
погіршується. Значення ж  $I(\nu)$  і  $I_{fold}(\nu)$ , як було показано, мало змінюються. Таким чином,  
один і той же спектр, можна використовувати і для виявлення гармонійних складових і для оці-  
нки характеристик шумового сигналу. Як приклад, що це ілюструє, наведені результати розра-  
хунку для сигналу у вигляді суми чотирьох синусоїд з однаковими амплітудами

$$A_i = \sqrt{\frac{2}{512}} = \frac{1}{16}, \quad (i = \overline{1,4})$$

та частотами

$$\nu_1 = 0.05; \nu_2 = 0.2; \nu_3 = 0.33; \nu_4 = 0.35$$

і шуму, отриманого пропусканням білого гаусівського шуму через описаний вище фільтр з па-  
раметрами:

$$\nu_1^F = 0.1; \nu_2^F = 0.25; \nu_3^F = 0.3; \nu_4^F = 0.35.$$

PSD, що показані на рис. 5, отримані при різних довжинах базових сегментів, які були  
доповнені нульовими відліками для забезпечення однакового розділення за частотою. Видно,  
що гармонійні складові з частотами  $\nu_2, \nu_3, \nu_4$  не ідентифікуються при довжині сегмента  
 $N = 256$  і досить чітко виявляються лише при  $N = 1024$ . Функції ж  $I(\nu)$  і  $I_{fold}(\nu)$  практично одна-  
кові у всіх випадках, що ілюструє і рис. 6.

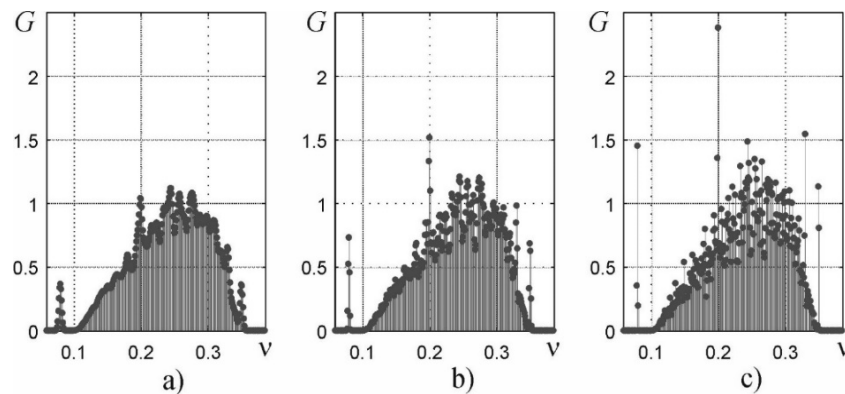


Рис. 5. Спектральні щільності потужності для суми шумового сигналу та 4-х синусоїд:  
а)  $N = 256$  (+768 нульових відліків); б)  $N = 512$  (+512 нульових відліків); в)  $N = 1024$

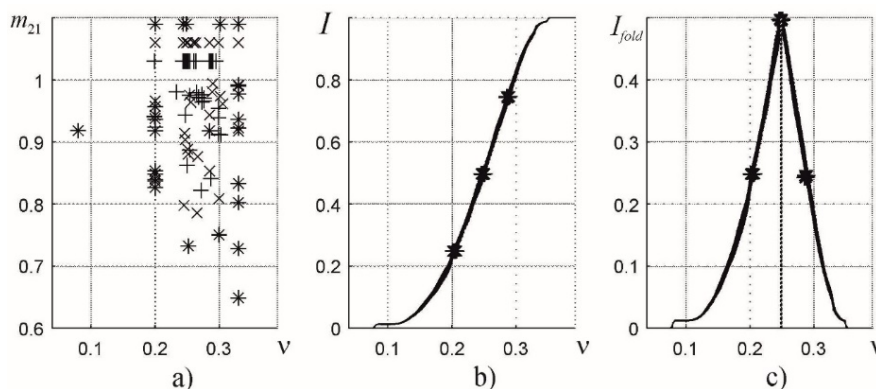


Рис. 6. Дані, що отримані за спектрами 20-ти сигналів, кожний з яких є сумою шумово-  
го сигналу і чотирьох синусоїд (мітки як на рис. 4)

### Висновки

Побудована дискретна модель широкопasmового шумового сигналу з спектральною щільністю потужності, що має заданий трапецеподібний вигляд.

Шумовий сигнал моделювався пропусканням нормально розподіленої послідовності псевдовипадкових чисел через дискретний фільтр.

Дослідження проведені при сталій довжині сигналу відносно періоду дискретизації. Визначалися спектральні щільності потужності, а у якості загальних характеристик розглядалися частоти максимумів та відношення екстремумів щільності. Досліджувався вплив на результати розрахунків параметрів побудови спектрів та вибіркової мінливості сигналу.

Показано, що для того ж самого сигналу, вище названі загальні характеристики змінюються в неприйнятно широких межах.

Запропоновано будувати оцінки шумового сигналу на основі кумулятивної функції розподілу потужності. Значення цієї функції практично не змінюються при зменшенні числа періодogram, що осереднюються, і відповідному збільшенні частотної роздільної здатності. Це дозволяє використовувати один і той же спектр і для виявлення гармонійних складових і для оцінки характеристик шумового сигналу.

### Список використаної літератури

1. Король В.І., Скобенко О.В. Акустичний спосіб прогнозу газодинамічних явищ у вугільних шахтах: моногр. Дніпро: Національний гірничий університет, 2013. 181 с.
2. Луньов С.Г., Колчин Г.І. Акустичний контроль викидонебезпеки в очисному вибої. Способи та засоби створення безпечних та здорових умов праці у вугільних шахтах: збірник наукових праць. Макіївка: МакНДІ, 2004. С. 97–107.
3. СОУ 10.1.00174088.011-2005. Правила ведення гірничих робіт на пластах схильних до газодинамічних явищ. [Чинний від 2005-12-30]. Вид. офіц. Київ: Мінвуглепром України, 2005. 224 с.
4. Marple, S. Lawrence, Jr. Digital spectral analysis: Second edition.: New York: Dover Publication, 2019. 410 p.
5. Stoica P. and Moses R. Spectral Analysis of Signals.: New Jersey: Prentice Hall, 2005. 427 p. URL: [https://www.maths.lu.se/fileadmin/maths/personal\\_staff/Andreas\\_Jakobsson/StoicaM05.pdf](https://www.maths.lu.se/fileadmin/maths/personal_staff/Andreas_Jakobsson/StoicaM05.pdf). (дата звернення: 09.07.2023).
6. Aliev T. Noise Control of the Beginning and Development Dynamics of Accidents.: Springer, 2019. 201 p. DOI: <https://doi.org/10.1007/978-3-030-12512-7>. (дата звернення: 09.07.2023).
7. Jombo G., Zhang, Y. Acoustic-Based Machine Condition Monitoring - Methods and Challenges.: *Eng*, 2023, № 4. P. 47–79. DOI: <https://doi.org/10.3390/eng4010004>. (дата звернення: 09.07.2023).
8. Córdenas E.S., Takazawa S.K., Garcı́s M.A., Chichester D.L., Hunley R.D., Young C.D. An Assessment of Persistent Acoustic Monitoring of a Nuclear Reactor during Full Power Generation.: *Acoustics*, 2023, № 5. P. 429–443. DOI: <https://doi.org/10.3390/acoustics5020025>. (дата звернення: 09.07.2023).
9. Oyarzun J., Aizpuru I., Baraia-Etxaburu I. Time–Frequency Analysis of Experimental Measurements for the Determination of EMI Noise Generators in Power Converters.: *Electronics*, 2022, № 11. DOI: <https://doi.org/10.3390/electronics11233898>. (дата звернення: 09.07.2023).
10. Bendat J.S., Piersol A.G. Random Data: Analysis and measurement procedures: 4th edition: Wiley, 2010. 640 p.
11. Moler C. Numerical Computing with MATLAB. URL: <https://www.mathworks.com/moler.html>
12. Jenkins G. M., Watts D. G. Spectral analysis and its applications: San Francisco: Holden-Day, 1969. 525 p.
13. Montgomery D.C., Runger G.C. Applied statistics and probability for engineers. URL: <https://web.archive.org/web/20120730233253/http://www.um.edu.ar/math/montgomery.pdf>. (дата звернення: 09.07.2023).

14. Monti K. L. Folded Empirical Distribution Function Curves-Mountain Plots. *The American Statistician*. 1995. Vol. 49, No. 4. P. 342–345. URL: <https://www.jstor.org/stable/2684570>. (дата звернення: 09.07.2023).

### References

1. Korol' V.I., Skobenko O.V. (2013). *Akustychnyj sposib prohnozu ghazodynamichnykh javyssh u vughiljnykh shakhtakh: monoghr. [The acoustic method of forecasting gas-dynamic phenomena in coalmines]*. Dnipro: Nacionaljnyj ghirnychyj universytet [in Ukrainian].
2. Lun'ov S.G., Kolchy'n G.I. (2004). Akustychnyj kontrolj vykydonebezpeky v ochysnomu vyboji [Acoustic monitoring of the emission hazard in the clean face]. *Sposoby ta zasoby stvorennja bezpechnykh ta zdorovykh umov praci u vughiljnykh shakhtakh: zbirnyk naukovykh pracj*, 97–107 [in Ukrainian].
3. Pravyla vedennia hirnychykh robit na plastakh skhylnykh do hazodynamichnykh javysshch [Rules for conducting mine work on layers of scalable to gas-dynamic phenomena] (2005) *SOU 10.1.00174088.011-2005 from 30d December 2005*. Kyiv: Minvuhleprom Ukrainy [in Ukrainian].
4. Marple, S. Lawrence, Jr (2019). *Digital spectral analysis: Second edition.*: New York: Dover Publication.
5. Stoica P. and Moses R. (2005) Spectral Analysis of Signals. Retrieved from [https://www.maths.lu.se/fileadmin/maths/personal\\_staff/Andreas\\_Jakobsson/StoicaM05.pdf](https://www.maths.lu.se/fileadmin/maths/personal_staff/Andreas_Jakobsson/StoicaM05.pdf)
6. Aliev T. (2019). Noise Control of the Beginning and Development Dynamics of Accidents. Retrieved from <https://doi.org/10.1007/978-3-030-12512-7>.
7. Jombo G., Zhang, Y. (2023). Acoustic-Based Machine Condition Monitoring — Methods and Challenges. Retrieved from <https://doi.org/10.3390/eng4010004>
8. Córdenas E.S., Takazawa S.K., Garcı́s M.A., Chichester D.L., Hunley R.D., Young C.D. (2023). An Assessment of Persistent Acoustic Monitoring of a Nuclear Reactor during Full Power Generation. Retrieved from <https://doi.org/10.3390/acoustics5020025>
9. Oyarzun J., Aizpuru I., Baraia-Etxaburu I. (2022) Time–Frequency Analysis of Experimental Measurements for the Determination of EMI Noise Generators in Power Converters. Retrieved from <https://doi.org/10.3390/electronics11233898>
10. Bendat J.S., Piersol A.G. (2010). *Random Data: Analysis and measurement procedures: 4th edition*: Wiley.
11. Moler C. Numerical Computing with MATLAB. Retrieved from <https://www.mathworks.com/moler.html>
12. Jenkins G. M., Watts D. G. (1969). *Spectral analysis and its applications*: San Francisco: Holden-Day.
13. Montgomery D. C., Runger G.C. Applied statistics and probability for engineers. Retrieved from <https://web.archive.org/web/20120730233253/http://www.um.edu.ar/math/montgomery.pdf>
14. Monti K. L. (1995) Folded Empirical Distribution Function Curves-Mountain Plots. *The American Statistician*, 49(4), 342–345. Retrieved from <https://www.jstor.org/stable/2684570>

Надійшла до редколегії 10.07.2023