

DOI: 10.31319/2519-8106.1(52)2025.330533

УДК 519.85

Строєва В.О.¹, кандидат фізико-математичних наук, доцент кафедри математичного моделювання та системного аналізу

Stroieva Viktoriia, candidate of physical and mathematical sciences, Associate Professor of the Department of Mathematical Modeling and System Analysis

ORCID: 0000-0001-8890-9056

e-mail: vikastroeva@ukr.net

Кісельова О.М.², доктор фізико-математичних наук, професор, декан факультету прикладної математики, член-кореспондент Національної академії наук України

Kiselyova Olena, doctor of physical and mathematical sciences, professor, dean faculty of applied mathematics, associated member of National academy sciences of Ukraine

ORCID: 0000-0003-4303-1707

e-mail: kiseleva47@ukr.net

Тарасюк О.С.¹, здобувач третього (доктора філософії) рівня вищої освіти

Tarasiuk Oleksandr, postgraduate student

ORCID: 0009-0009-1704-7749

e-mail: sashko98man@gmail.com

¹Дніпровський державний технічний університет, м. Кам'янське

Dniprovsky State Technical University, Kamianske

²Дніпровський національний університет імені Олеся Гончара, м. Дніпро

Oles Honchar Dnipro National University, Dnipro

РЕЗУЛЬТАТИ РОЗМІЩЕННЯ МЕРЕЖІ СКЛАДІВ ІНТЕРНЕТ МАГАЗИНІВ ЗАСОБАМИ ТЕОРІЇ ОПТИМАЛЬНОГО РОЗБИТТЯ МНОЖИН

RESULTS OF PLACEMENT OF WAREHOUSES OF ONLINE STORES USING THE THEORY OF OPTIMAL PARTITIONING OF SETS

У роботі розроблено математичну модель задачі розміщення та розподілу складів для інтернет-магазинів, яка враховує обмеження щодо місткості складу, витрати на транспортування та зберігання товарів, а також попит на різні види товарів. Запропоновано алгоритм розв'язання задачі, заснований на методах недиференційованої оптимізації теорії оптимального розбиття множин. Для демонстрації ефективності розробленого алгоритму була проведена серія чисельних експериментів. Розроблені математична модель та алгоритм можуть бути застосовані для оптимізації логістичних процесів в онлайн-торгівлі, що дозволить знизити витрати та покращити обслуговування клієнтів.

Ключові слова: оптимальне розбиття, задачі розміщення-розподілу.

The modern world is characterized by the growing complexity of systems that require optimization and effective management. In conditions of limited resources, time and information uncertainty, the problems of optimal resource allocation become particularly relevant. Solving such problems is often associated with processing large amounts of data, which makes the use of mathematical methods and information technologies necessary. In this context, the study of optimal set partitioning (OSP) methods is an important direction that has significant potential for solving various applied problems, in particular, allocation-distribution problems. The article analyzes modern research and publications on the problems of optimal resource allocation and allocation-distribution problems. The application of various methods and approaches, such as swarm intelligence, mixed linear-integer programming

models, geographic information systems, Voronoi diagrams, Weber's problem, and others, is considered. Special attention is paid to non-differentiated optimization methods in the context of optimal set partitioning theory, which are a powerful tool for modeling a wide range of problems related to resource allocation. The paper develops a mathematical model of the problem of warehouse placement and distribution for online stores, which takes into account restrictions on warehouse capacity, costs of transportation and storage of goods, as well as demand for various types of goods. An algorithm for solving the problem based on OSP methods is proposed. A series of numerical experiments have been conducted to demonstrate the effectiveness of the developed algorithm. The developed mathematical model and algorithm can be used to optimize logistics processes in online trading, which will reduce costs and improve the level of customer service. Further research may be aimed at developing more complex models that take into account additional factors, such as demand dynamics, limitations on the capacity of transport networks, and others.

Keywords: *optimal partitioning, problems placing-distribution.*

Постановка проблеми

Сучасне життя поставило перед людством потребу досліджувати, проектувати та оптимізовувати складні системи, керувати ними в умовах недостатньої інформації, обмеженості ресурсів та часу. Попри великі можливості, людство щодня стикається з новими перепонами на шляху свого подальшого розвитку. Це й підвищення температури поверхні землі, танення льодовиків, забруднення атмосфери, океанів та поверхні суші, територіальні конфлікти. Окрім того, особливо актуальними на сьогоднішній день є проблеми оптимального розподілу ресурсів.

Водночас, якісні рішення таких задач вимагають обробки величезного обсягу інформації протягом короткого часу, що не під силу людині, а результати прийнятих при цьому неправильних рішень можуть призвести до негативних наслідків: економічних, соціальних, екологічних та ін. Тому, визначальним стає необхідність використання спеціальних засобів, в основі яких — добре розроблені і строго обґрунтовані математичні методи. А з розвитком інформаційних технологій, електронно-обчислювальної техніки, а також появою засобів, що дозволяють візуалізувати отримані результати, з'являється ще більше можливостей для розв'язання більш складних задач, які описують широке коло актуальних прикладних задач оптимального розподілу ресурсів.

Аналіз останніх досліджень та публікацій

Проблеми оптимального розподілу ресурсів виникають у різних сферах, у науковій, технічній, соціальній сферах та, звичайно, у бізнесі. Саме таким дослідженням присвячено роботи [1—2]. Оптимізація роботи складних систем у галузях господарства, зокрема енергетичній, забезпечується різними сучасними підходами, зокрема, застосуванням ройового інтелекту. Так, у роботах [3—4], для визначення місцезнаходження об'єкта та оптимізації його розміщення запропоновано саме ці алгоритми. Цікавим є застосування таких алгоритмів до оптимізації способів сумісного використання автотранспорту, тобто оптимізації розміщення каршерингу. Зазначена проблема досліджується у роботі [5] засобами застосування моделі змішаного лінійно-цілочисельного типу (MILP). А ось у роботі [6] проведено дослідження служби каршерингу, яке спрямовано на визначення найкращого розміщення центрів обміну дилерської та обслуговуючої мережі. У цій роботі застосовується географічна інформаційна система. Вона визначає попит на поїздки у вигляді певного розподілу, а для визначення оптимального розміщення центрів представлено деякі моделі ієрархічного розміщення об'єктів. Математичне моделювання здійснено засобами зважених діаграм Вороного та класичної задачі Вебера. Цільовою функцією є — максимізація попиту при отриманні прибутку оператора за рахунок мінімізації відстаней до відповідних центрів мережі. У роботі [7] розв'язують задачу динамічного моделювання поведінки потенційних клієнтів каршерингу, які здійснюють запит на доступні ресурси та використовують певний сервіс. У роботі для оптимізації розміру автопарку послуги каршерингу для одностороннього та двостороннього режимів застосовується вище згадана модель MILP, яка імітує взаємодію клієнтів. Важливим є використання реальних параметрів та просторових даних для аналізу різних сценаріїв роботи системи. У статті [8], для розв'язання задачі динаміч-

ного розміщення об'єктів при умові швидкозростаючого ринку будівельної галузі, розроблено так звану модель неперервного наближення. Вона визначає оптимальне розміщення об'єктів та час їх будівництва, при мінімізації витрат на будівництво й обслуговування клієнтів на етапах планування. Для забезпечення чисельних результатів оптимальна щільність об'єктів в моделі визначається у просторово-часовому континуумі. Ще одним актуальним та поширеним методом розподілу ресурсів є модель розміщення-розподілу, досліджена в [9]. Вона забезпечує оптимізацію розміщення певних центрів та визначення того, хто який центр буде обслуговувати. В інших дослідженнях, зокрема [10], розроблено моделі задоволення певного попиту при оптимізації розміщення визначених об'єктів з метою мінімізації їх кількості. На тлі зазначених актуальних проблем виникає безліч теоретичних та практичних задач, багато з яких можна звести до задач оптимального розбиття множин (ОРМ). У загальному змісті — це нескінченновимірні задачі розташування умовних підприємств на певній території з одночасним розбиттям даної території, що неперервно заповнена користувачами, на такі області користувачів, кожна з яких буде обслуговуватися одним підприємством, з метою мінімізації виробничих та транспортних витрат. Частинним випадком таких задач є нескінченновимірні транспортні задачі. Дослідження задач ОРМ є сучасним напрямком математичного програмування, що активно розвивається. Так, у роботах [11—13] приведено результати застосування теоретично обґрунтованих алгоритмів дослідження задач ОРМ до ряду прикладних задач, а саме, задач розподілу ресурсів під час епідемії [11], задач розміщення підрозділів банку з метою оптимізації клієнтотоку [12] та задач розміщення закладів середньої освіти на території об'єднаних територіальних громад [13].

Формулювання мети дослідження

За даними, отриманими внаслідок національного дослідження аудиторії користувачів українського Інтернету, які були оприлюднені нещодавно в електронних ЗМІ, в Україні 80% населення є регулярними користувачами глобальної мережі, серед них найбільш активними є мешканці великих міст, молодь, особи з високим прибутком. Саме тому, було б украй нерозсудливим залишати без уваги споживчі запити цієї аудиторії, не спробувавши задовольнити хоча б частину таких запитів прямо в Інтернеті. Для того, щоб реалізувати цю ідею на практиці, у нагоді стануть інтернет-магазини, орієнтовний товарообіг яких, на думку аналітиків, тільки у вітчизняному сегменті всесвітньої мережі цього року досягне 1 млрд дол. Крім того, за останні п'ять років, спочатку в умовах світової пандемії, а потім повномасштабного вторгнення росії в Україну, актуальність інтернет-послуг продажу різноманітних товарів стрімко зростає.

У процесі свого переміщення від первинного джерела сировини до кінцевого споживача матеріальний потік може накопичуватися у вигляді запасів на певній ділянці логістичного ланцюга. Через це, виникає об'єктивна потреба в спеціально облаштованих місцях для їх зберігання, та окрім того, здійснення над ними важливих логістичних операцій, таких як сортування, комплектація, пакування тощо. Цю роль виконують різноманітні склади.

Складська мережа є одним з елементів логістичної системи, яка забезпечує баланс інтересів усіх учасників ринку та створює сучасну систему товароруху, орієнтовану на максимальне задоволення потреб кінцевих споживачів. Сьогодні Україні необхідно створити розгалужену та територіально збалансовану складську мережу, оскільки на даний час існує значна територіальна нерівномірність її розвитку.

Розміщення і формування складської мережі є оптимізаційним, оскільки, з одного боку, будівництво нових або купівля діючих складів і їх експлуатація пов'язані зі значними капіталовкладеннями, а з іншого — необхідно забезпечити (разом з підвищенням рівня обслуговування споживачів) скорочення витрат обігу від наближення до клієнта. Очевидно, що у своїй математичній постановці саме такі задачі можуть бути представленими як нескінченновимірні задачі розміщення-розподілу, де в якості споживачів виступають клієнти інтернет-магазинів. Дослідженню цих проблем присвячена представлена робота.

Виклад основного матеріалу

У заданому регіоні необхідно розмістити N складів інтернет магазинів (ІМ) з метою оптимального розподілення споживчого попиту на продуктові та промислові види товарів. Вводячи обмеження на сумарну потужність складів, поставлену задачу розміщення-розподілу зве-

дено до неперервної лінійної багатопродуктової задачі оптимального розбиття множини на підмножини з розміщенням їх центрів при обмеженнях.

Математична модель. Необхідно розбити множину споживачів Ω на їх зони обслуговування Ω_i^j N складами ІМ окремо по кожному виду товарів j так, щоб

$$\bigcup_{i=1}^N \Omega_i^j = \Omega, j = \overline{1, M}, \text{mes}(\Omega_i^j \cap \Omega_k^j) = 0, i \neq k, i, k = \overline{1, N}, j = \overline{1, M} \quad (1)$$

та розмістити ці склади в області Ω , мінімізуючи функціонал сумарних витрат на зберігання товарів і доставку їх до споживача:

$$F(\{\Omega_1^1, \dots, \Omega_N^1; \dots; \Omega_1^M, \dots, \Omega_N^M\}, \{\tau_1, \dots, \tau_N\}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^M \left\{ \iint_{\Omega_i^j} c^j(x, y, \tau_i) \rho^j(x, y) dx dy + \varphi_i^j \left(\iint_{\Omega_i^j} \rho^j(x, y) dx dy \right) \right\}, \quad (2)$$

де $\rho^j(x, y)$ — щільність, з якою розподілений попит на j -ий вид товарів в області Ω ; (x, y) — координати знаходження споживача; $\tau_1, \dots, \tau_N$ — пункти можливого розміщення складів; $c^j(x, y, \tau_i)$ — вартість транспортування одиниці продукції від складу τ_i споживачу з координатами (x, y) ; $\varphi_i^j(Y_i^j)$ — залежність вартості зберігання продукції j -ого виду товарів від потужності i -того складу Y_i^j та визначається за формулою $Y_i^j = \iint_{\Omega_i^j} \rho^j(x, y) dx dy$.

Потужність i -ого складу по всім видам товарів визначається сумарним попитом споживачів, які належать Ω_i^j та не повинна перевищувати існуючі потужності, визначені відповідними обмеженнями:

$$\sum_{j=1}^M \int_{\Omega_i^j} \rho^j(x, y) dx dy \leq b_i, i = 1, \dots, p; \quad \sum_{j=1}^M \int_{\Omega_i^j} \rho^j(x, y) dx dy = b_i, i = p + 1, \dots, N. \quad (3)$$

При цьому виконуються умови розв'язності задачі:

$$S = \int_{\Omega} \sum_{j=1}^M \rho^j(x, y) dx dy \leq \sum_{i=1}^N b_i, 0 \leq b_i \leq S, i = 1, \dots, N. \quad (4)$$

Отже, представлена задача є лінійною неперервною багатопродуктовою задачею оптимального розбиття множини $\Omega \in E^n$ на її неперетинні підмножини $\Omega_1^1, \dots, \Omega_N^1; \dots; \Omega_1^M, \dots, \Omega_N^M$ (серед яких можуть бути і порожні) з розміщенням центрів цих підмножин при обмеженнях у вигляді рівностей та нерівностей.

Для дослідження таких задач застосовано методи та алгоритми розв'язання задач ОРМ, основна концепція яких базується на єдиному підході, а саме, у зведенні вихідних задач нескінченновимірного математичного програмування з булевими змінними через функціонал Лагранжа до двоїстих скінченновимірних негладких задач, для чисельного розв'язання яких застосовано сучасні модифікації ϵ -алгоритму Н.З. Шора. Чисельні результати роботи алгоритмів отримано при дослідженні ряду модельних задач.

Задача А1. Нехай задано множину споживачів двох видів товарів $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 30, 0 \leq y \leq 30\}$, товари можуть бути розміщено на сімох складах. Транспортні витрати на доставку до споживача (x, y) від i -го складу по j -ому виду товару задано відповідно до виду товару:

$$c^j(x, y, \tau_i) = \begin{cases} \sqrt{(x - \tau_i^{(1)})^2 + (y - \tau_i^{(2)})^2}, & j = 1; \\ \max\{|x - \tau_i^{(1)}|, |y - \tau_i^{(2)}|\}, & j = 2. \end{cases}$$

Попит $\rho^j(x, y)$ на товари розподілений в області Ω рівномірно. Функції $\varphi_i^j(Y_i^j)$, які описують вартості збереження j -го виду товару на i -му складі в залежності від потужності складу $\varphi_i^j(Y_i^j) = T_i + a_i^j Y_i^j, i = \overline{1, 7}, j = 1, 2$, де потужність Y_i^j i -го складу по постачанню j -го виду товару визначається за формулою: $Y_i^j = \iint_{\Omega_i^j} \rho^j(x, y) dx dy$.

Потужність i -го складу по всім видам товарів визначається сумарним попитом споживачів, які належать $\Omega_i^j, i = \overline{1, 7}$, та для складів $i = 1, 2, 3, 4, 5$ не повинна перевищувати задані об'єми, тобто на потужності складів накладені наступні обмеження:

$$0 \leq \sum_{j=1}^2 \iint_{\Omega_i^j} \rho^j(x, y) dx dy \leq b_i, \quad i = 1, 2, 3, 4, 5;$$

$$b_1 = 100, \quad b_2 = 86, \quad b_3 = 10, \quad b_4 = 100, \quad b_5 = 20.$$

а для складів з номерами $i = 6, 7$ повинна дорівнювати заданим об'ємам:

$$\sum_{j=1}^2 \iint_{\Omega_i^j} \rho^j(x, y) dx dy = b_i, \quad i = 6, 7, \quad b_6 = 36, \quad b_7 = 40.$$

Необхідно розбити множину споживачів Ω на їх зони обслуговування сьома складами по кожному виду товарів, тобто на підмножини $\Omega_i^j, i = \overline{1, 7}, j = 1, 2$, з метою мінімізації функціоналу сумарної вартості витрат на зберігання товарів та доставку їх до споживача:

$$F(\{\Omega_1^1, \dots, \Omega_7^1; \dots; \Omega_1^2, \dots, \Omega_7^2\}, \{\tau_1, \dots, \tau_5\}) = \\ = \sum_{i=1}^7 \sum_{j=1}^2 \left\{ \iint_{\Omega_i^j} c^j(x, y, \tau_i) \rho^j(x, y) dx dy + \varphi_i^j \left(\iint_{\Omega_i^j} \rho^j(x, y) dx dy \right) \right\}.$$

Не є виключенням той випадок, коли деякі з підмножин $\Omega_i^j, i = \overline{1, 7}, j = 1, 2$, опиняться порожніми.

Множина Ω покривалася сіткою з вузлами $i = \overline{1, 30}, j = \overline{1, 30}$. В якості початкових значень двоїстих змінних задано $\psi_i^{(0)}, i = \overline{1, 7}$, початкові значення потужностей: $Y_1^{j(0)} = 50, Y_2^{j(0)} = 10, Y_3^{j(0)} = 10, Y_4^{j(0)} = 60, Y_5^{j(0)} = 500, Y_6^{j(0)} = 60, Y_7^{j(0)} = 60, j = \overline{1, 2}$.

$$\text{В якості початкових координат складів } \tau^0 = \begin{pmatrix} 0.0; 0.0; 0.0; 0.0; 0.0 \\ 0.0; 0.0; 0.0; 0.0; 0.0 \end{pmatrix}.$$

Умовою завершення обчислень є виконання нерівності:

$$\|(Y^{(k)}, \Psi^{(k)}) - (Y^{(k+1)}, \Psi^{(k+1)})\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon = 10^{-3}.$$

За 500 ітерацій отримано наступні результати:

- оптимальні координати пунктів розміщення складів:

$$\tau_1 = (15, 3; 3, 3), \quad \tau_2 = (8, 6; 4, 7), \quad \tau_3 = (2, 3; 2, 3),$$

$$\tau_4 = (16, 5; 9, 1), \quad \tau_5 = (2, 9; 8, 9), \quad \tau_6 = (14, 4; 16, 1), \quad \tau_7 = (4, 9; 15, 6);$$

- оптимальні потужності кожного з сьоми складів:

$$Y_1 = 25, 7; Y_2 = 30; Y_3 = 9, 8; Y_4 = 26, 8; Y_5 = 20, 2; Y_7 = 40, 1.$$

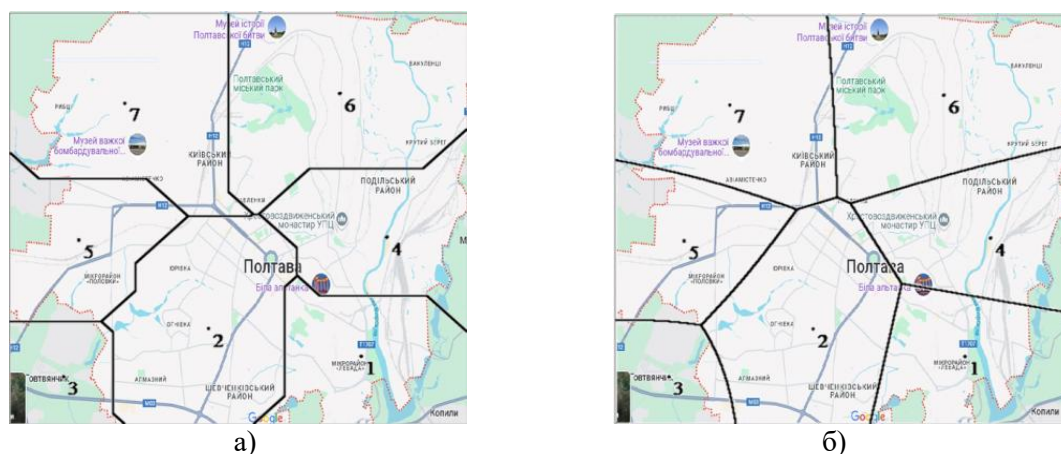


Рис. 1. Оптимальне розбиття множини споживачів Ω для задачі A1

Задача A2. У постановці задачі A1 задамо значення вагових коефіцієнтів по кожному з двох видів продуктів:

$$a_1^1 = 100, a_2^1 = 100, a_3^1 = 100, a_4^1 = 0, a_5^1 = 0, a_6^1 = 0, a_7^1 = 0;$$

$$a_1^2 = 0, a_2^2 = 0, a_3^2 = 0, a_4^2 = 100, a_5^2 = 100, a_6^2 = 100, a_7^2 = 100;$$

а попит $\rho^j(x, y)$ на товари розподілений в області Ω з відповідними щільностями, заданими у вигляді

$$\rho^j(x, y) = \frac{1}{\ln((x - y)^j - 110.003)}, \quad j = 1, 2.$$

За 264 ітерації отримано наступні результати:

- оптимальні координати пунктів розміщення складів:

$$\tau_1 = (8,3; 8,3), \quad \tau_2 = (13,3; 13,3), \quad \tau_3 = (3,3; 3,3),$$

$$\tau_4 = (2,0; 6,8), \quad \tau_5 = (2,7; 2,2), \quad \tau_6 = (13,5; 5,7), \quad \tau_7 = (8,6; 14,9);$$

- оптимальні потужності кожного з семи складів:

$$Y_1 = 49,3; Y_2 = 43,4; Y_3 = 10,3; Y_4 = 4,21; Y_5 = 4,9; Y_6 = 36,01; Y_7 = 40,01.$$

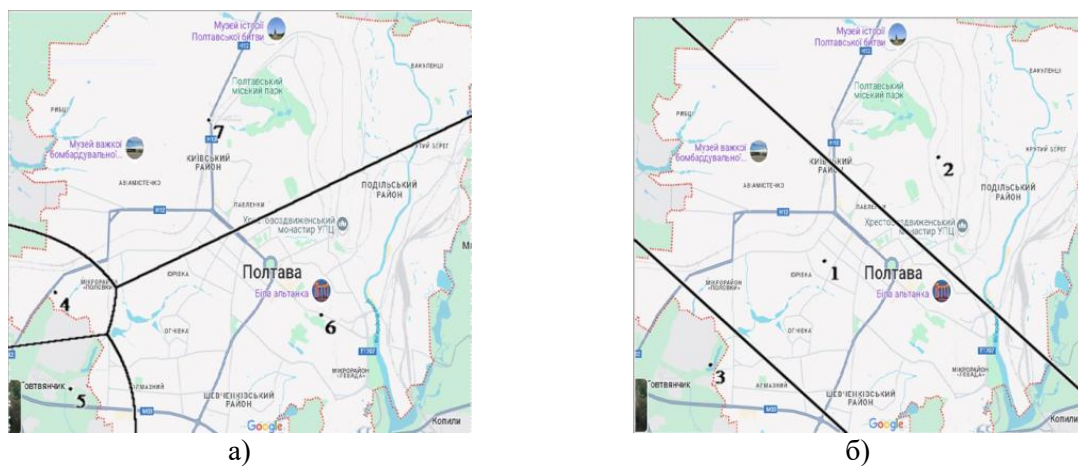


Рис. 2. Оптимальне розбиття множини споживачів Ω для задачі A2

Задача А3. У постановці задачі А2 накладемо на потужності складів наступні обмеження:

$$0 \leq \sum_{j=1}^2 \iint_{\Omega_j^i} \rho^j(x, y) dx dy \leq b_i, \quad i = 2, 4, 5; \quad b_2 = 86, \quad b_4 = 100, \quad b_5 = 20,$$

а для складів з номерами 1, 3, 6, 7 потужність повинна дорівнювати заданим об'ємам:

$$\sum_{j=1}^2 \iint_{\Omega_j^i} \rho^j(x, y) dx dy = b_i, \quad i = 1, 3, 6, 7; \quad b_1 = 100, \quad b_3 = 10, \quad b_6 = 36, \quad b_7 = 40.$$

Транспортні витрати на доставку до споживача (x, y) від i -го складу по j -ому виду товару задано відповідно до виду товару:

$$c^j(x, y, \tau_i) = \begin{cases} \sqrt{(x - \tau_i^{(1)})^2 + (y - \tau_i^{(2)})^2}, & j = 1; \\ |x - \tau_i^{(1)}|, |y - \tau_i^{(2)}|, & j = 2. \end{cases}$$

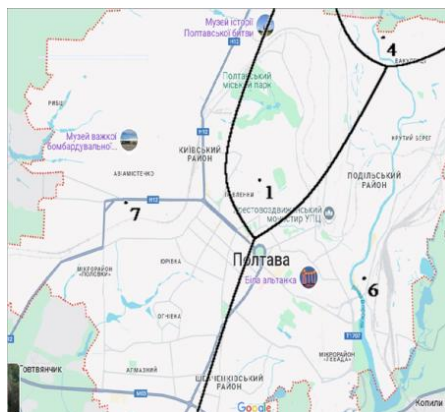
Тоді за 500 ітерацій отримано наступні результати:

- оптимальні координати пунктів розміщення складів:

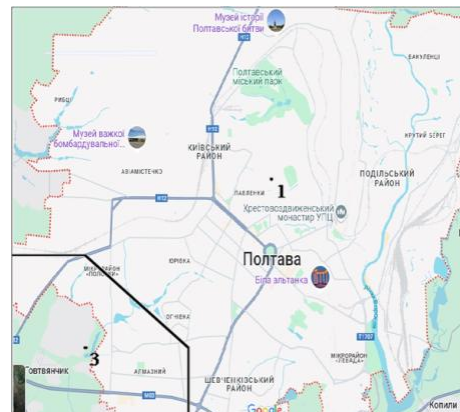
$$\tau_1 = (11,3; 11,6), \quad \tau_2 = (0,6; 0,6), \quad \tau_3 = (3,2; 3,4), \\ \tau_4 = (16,9; 18,6), \quad \tau_5 = (17,2; 10,7), \quad \tau_6 = (16,0; 6,8), \quad \tau_7 = (5,3; 10,5);$$

- оптимальні потужності кожного з семи складів:

$$Y_1=100; Y_2=0; Y_3=10,0; Y_4=2,45; Y_5=0,0; Y_6=35,9; Y_7=40,0.$$



а)



б)

Рис. 3. Оптимальне розбиття множини споживачів Ω для задачі А3

Задача А4. У постановці задачі А3 накладемо на потужності складів наступні обмеження:

$$0 \leq \sum_{j=1}^2 \iint_{\Omega_j^i} \rho^j(x, y) dx dy \leq b_i, \quad i = 1, 2, 3, 5, 7; \quad b_1 = 100, \quad b_2 = 86, \quad b_3 = 10, \quad b_5 = 20, \quad b_7 = 40,$$

а для складів з номерами 4 та 6 потужність повинна дорівнювати заданим об'ємам:

$$\sum_{j=1}^2 \iint_{\Omega_j^i} \rho^j(x, y) dx dy = b_i, \quad i = 4, 6; \quad b_4 = 100, \quad b_6 = 36.$$

Тоді за 343 ітерацій отримано наступні результати:

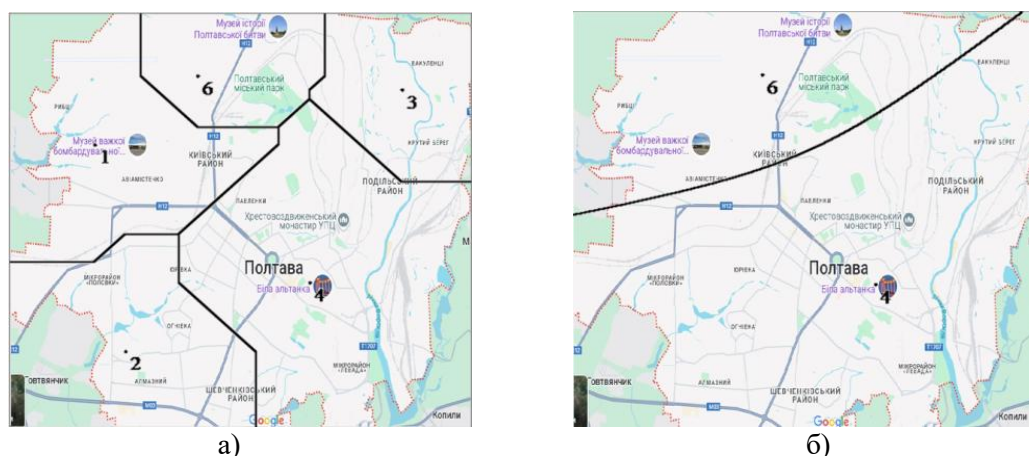


Рис. 4. Оптимальне розбиття множини споживачів Ω для задачі A4

- оптимальні потужності кожного з семи складів:
 $Y_1=24,1$; $Y_2=18,0$; $Y_3=10,3$; $Y_4=100,0$; $Y_5=0,0$; $Y_6=35,8$; $Y_7=0,0$;
- оптимальні координати пунктів розміщення складів:
 $\tau_1 = (3,7; 13,7)$, $\tau_2 = (5,0; 3,7)$, $\tau_3 = (17,0; 16,3)$,
 $\tau_4 = (13,0; 7,0)$, $\tau_5 = (0,0; 0,0)$, $\tau_6 = (8,1; 17,0)$, $\tau_7 = (0,2; 0,2)$.

Задача A5. У постановці задачі A4 транспортні витрати на доставку до споживача (x, y) від i -го складу по j -ому виду товару задано відповідно до виду товару:

$$c^j(x, y, \tau_i) = \begin{cases} \sqrt{(x - \tau_i^{(1)})^2 + (y - \tau_i^{(2)})^2}, & j = 1; \\ \max\{|x - \tau_i^{(1)}|, |y - \tau_i^{(2)}|\}, & j = 2. \end{cases}$$

Тоді за 233 ітерації отримано наступні результати:

- оптимальні координати пунктів розміщення складів:
 $\tau_1 = (16,0; 14,7)$, $\tau_2 = (5,7; 4,3)$, $\tau_3 = (17,3; 6,7)$,
 $\tau_4 = (7,3; 13,3)$, $\tau_5 = (0,0; 0,0)$, $\tau_6 = (14,3; 3,7)$, $\tau_7 = (0,2; 0,2)$;
- оптимальні потужності кожного з семи складів:
 $Y_1=19,1$; $Y_2=22,9$; $Y_3=10,0$; $Y_4=100,2$; $Y_5=0,0$; $Y_6=35,8$; $Y_7=0,0$.

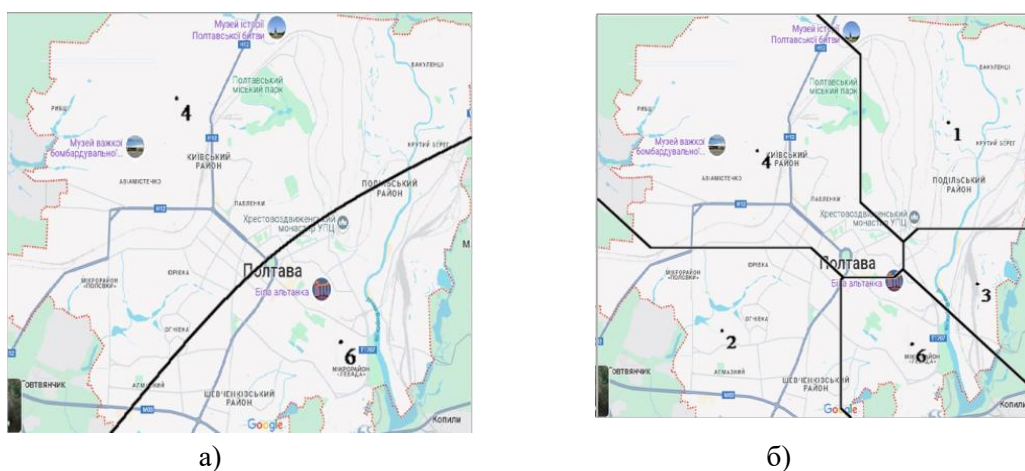


Рис. 5. Оптимальне розбиття множини споживачів Ω для задачі A5

Аналіз одержаних результатів. У задачі A1 для споживачів попит на різні товари та вартість їх зберігання вважаються однаковими, що відображається в отриманих результатах відповідним рівномірним розбиттям. Така рівномірність може бути на практиці скоріше виключенням, тому, у модельній задачі A2, попит на товари та вартість їх зберігання задано аналітично. У результаті роботи алгоритму графічна візуалізація та чисельні результати відображають відповідність заданим початковим умовам та обмеженням. Наступні тестові моделі задач дозволили переконатись в адекватності роботи алгоритму у сенсі його чутливості до особливостей застосованих метрик, виду обмежень, кількості потрібних ітерацій. В усіх модельних задачах виконано умови розв'язності. Зведені результати чисельних досліджень представлено у наступній табл. 1.

Таблиця 1. Зведена таблиця результатів оптимізації розміщення мережі складів ІМ

Транспортні витрати на доставку товарів різних груп визначено метриками	Задачі з розміщенням складів ІМ						
	Вартість зберігання товарів відповідно до їх виду	Попит на товари	Обмеження		Кількість ітерацій	Оптимальні значення функціоналів	
			у вигляді рівності	у вигляді нерівності		прямого, F^*	двоїстого, G^*
Евклідова Чебишова	однакова	рівномірний	2	5	модельна задача A1		
					500	535,7	535,5
Евклідова Чебишова	різна	нерівномірний	2	5	модельна задача A2		
					264	952,75	953,37
Евклідова Мангеттенська	різна	нерівномірний	4	3	модельна задача A3		
					500	2389,15	2073,22
Евклідова Мангеттенська	різна	нерівномірний	2	5	модельна задача A4		
					343	6097,68	6117,35
Евклідова Чебишова	різна	нерівномірний	2	5	модельна задача A5		
					233	5975,11	5967,43

Висновки

У роботі проведено математичне моделювання задач розміщення-розподілу складів інтернет-магазинів з метою оптимізації функціоналу сумарної вартості витрат на зберігання товарів промислової і продовольчої групи та доставку їх до споживача. Засобами узагальненого програмного продукту [14] проведено чисельні дослідження зазначених задач, які демонструють ефективність розробленого алгоритму. Розроблена математична модель та алгоритм можуть бути використані для оптимізації логістичних процесів в інтернет-торгівлі, що дозволить знизити витрати та підвищити рівень обслуговування клієнтів. Подальші дослідження можуть бути спрямовані на розробку більш складних моделей, що враховуватимуть додаткові фактори, такі як динаміка попиту, обмеження на пропускну здатність транспортних мереж та інші.

Список використаної літератури

1. Mallozzi L., Puerto J., Rodríguez-Madrena M. On Location-Allocation Problems for Dimensional Facilities. *Journal of Optimization Theory and Applications*. 2018. P. 1–38.
2. Sahin G., Sural H. A review of hierarchical facility location models. *Comput. Oper. Res.* 2007. Vol. 34. P. 2310–2331.

3. Torkestani S.S., Seyedhosseini S.M., Makui A. Hierarchical Facility Location and Hub Network Problems: A literature review. *J. Ind. Syst. Eng.* 2016. Vol. 9. P. 1–22.
4. Lin Y., Jia H., Yang Y., Tian G., Tao F., Ling L. An improved artificial bee colony for facility location allocation problem of end-of-life vehicles recovery network. *J. Clean. Prod.* 2018. Vol. 205. P. 134–144.
5. Chen L., Zhang W., Ma J., Wang L. Newly-added Station Location-allocation in One-way Station-based Carsharing Systems. In *Proceedings of the 2019 Chinese Control Conference*. Guangzhou, China, 27–30 July 2019. Vol. 2019.
6. Lage M.d.O., Machado C.A.S., Monteiro C.M., Davis C.A. Jr., Yamamura C.L.K., Berssaneti F.T., Quintanilha J.A. Using Hierarchical Facility Location, Single Facility Approach, and GIS in Carsharing Services. *Sustainability*. 2021. 13(22). P. 240–252.
7. Monteiro C.M., Machado C.A.S., Lage M.O., Berssaneti F.T., Davis C.A., Quintanilha J.A. Optimization of carsharing fleet size to maximize the number of clients served. *Comput. Environ. Urban Syst.* 2021. Vol. 87.
8. Wang X., Lim M., Ouyang Y. A Continuum Approximation Approach to the Dynamic Facility Location Problem in a Growing Market. *Transportation Science*. 2018. 51:1. P. 343–357.
9. Murray A.T., Xu J., Wang Z., Church R.L. Commercial GIS location analytics: Capabilities and performance. *Int. J. Geogr. Inf. Sci.* 2019. Vol. 33. P. 1106–1130.
10. Karatas M. A multi-objective facility location problem in the presence of variable gradual coverage performance and cooperative cover. *Eur. J. Oper. Res.* 2017. V. 262. P. 1040–1051.
11. Stroieva V.O., Kiselyova O.M., Stroieva H.V., Kosenko A.R. Numerical research of models of optimal resource allocation during an epidemic. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. Дніпро: ДНУ, 2020. С. 74–82.
12. Строева В.О., Кисельова О.М., Строева Г.В., Косенко А.Р. Математичне моделювання задачі розміщення підрозділів банку з метою оптимізації клієнтопотоку. *Математичне моделювання*. № 1(43). Кам'янське: ДДТУ, 2020. С. 101–108.
13. Кисельова О.М., Строева В.О., Строева Г.В. Оптимізація розміщення закладів середньої освіти на території об'єднаних територіальних громад. *Питання прикладної математики і математичного моделювання*. Дніпро, 2023. С. 109–117.
14. Кисельова О.М., Строева В.О., Притоманова О.М., Строева Г.В. Про програмний продукт розв'язання неперервних задач оптимального розбиття множин. *Математичне та програмне забезпечення інтелектуальних систем: матеріали XVI міжнар. наук.-практ. конф. м. Дніпро, 21-23 лист., 2018 р.* Дніпро: ДНУ, 2018. С. 97–98.

References

- [1] Mallozzi L., Puerto J., Rodríguez-Madrena M. (2018). On Location-Allocation Problems for Dimensional Facilities. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 1–38.
- [2] Sahin G., Sural H. (2007). A review of hierarchical facility location models. *Comput. Oper. Res.*, (Vol. 34), 2310–2331.
- [3] Torkestani S.S., Seyedhosseini S.M., Makui A. (2016). Hierarchical Facility Location and Hub Network Problems: A literature review. *J. Ind. Syst. Eng.*, (Vol. 9), 1–22.
- [4] Lin Y., Jia H., Yang Y., Tian G., Tao F., Ling L. (2018). An improved artificial bee colony for facility location allocation problem of end-of-life vehicles recovery network. *J. Clean. Prod.*, (Vol. 205), 134–144.
- [5] Chen L., Zhang W., Ma J., Wang L. (July 2019). Newly-added Station Location-allocation in One-way Station-based Carsharing Systems. In *Proceedings of the 2019 Chinese Control Conference* (27–30). Guangzhou, China.
- [6] Lage M.d.O., Machado C.A.S., Monteiro C.M., Davis C.A. Jr., Yamamura C.L.K., Berssaneti F.T., Quintanilha J.A. (2021). Using Hierarchical Facility Location, Single Facility Approach, and GIS in Carsharing Services. *Sustainability*, (13(22)), 240–252.

- [7] Monteiro C.M., Machado C.A.S., Lage M.O., Berssaneti F.T., Davis C.A., Quintanilha J.A. (2021). Optimization of carsharing fleet size to maximize the number of clients served. *Comput. Environ. Urban Syst.*, (Vol. 87), 365–378.
- [8] Wang X, Lim M, Ouyang Y. (2018). A Continuum Approximation Approach to the Dynamic Facility Location Problem in a Growing Market. *Transportation Science*, (51(1)), 343–357.
- [9] Murray A.T., Xu J., Wang Z., Church R.L. (2019). Commercial GIS location analytics: Capabilities and performance. *Int. J. Geogr. Inf. Sci.*, (Vol. 33), 1106–1130.
- [10] Karatas M. (2017). A multi-objective facility location problem in the presence of variable gradual coverage performance and cooperative cover. *Eur. J. Oper. Res.*, (V. 262), 1040–1051.
- [11] Stroieva V.O., Kiselyova O.M., Stroieva H.V., Kosenko A.R. (2020). Numerical research of models of optimal resource allocation during an epidemic. *Issues of applied mathematics and mathematical modeling*, 74–82.
- [12] Stroeva V.O., Kiseleva O.M., Stroeva G.V., Kosenko A.R. (2020). Matematychnе modeliuвання zadachi rozmishchennia pidrozdiliv banku z metoiu optymizatsii kliientopotoku [Mathematical modeling of the problem of placing bank units to optimize customer flow]. *Mathematical modeling*, (1(43)), 101–108.
- [13] Kiseleva O.M., Stroeva V.O., Stroeva G.V. (2023). Optymizatsiia rozmishchennia zakladiv serednoi osvity na terytorii obiednanykh terytorialnykh hromad [Optimization of the placement of secondary education institutions on the territory of united territorial communities]. *Issues of applied mathematics and mathematical modeling*, 109–117.
- [14] Kiseleva O.M., Stroeva V.O., Prytomanova O.M., Stroeva G.V. (November 21-23, 2018). Pro prohramy produkt rozv'iazannia neperervnykh zadach optymального rozbytta mnozhyn [On the program product of solving continuous problems of optimal partitioning of sets]. In *Mathematical and software support of intellectual systems: XVI International Scientific and Practical Conference* (pp. 97–98). Dnipro: DNU.

Надійшла до редакції 21.03.2025