МАТЕМАТИЧНЕ МОДЕЛЮВАННЯ В ПРИРОДНИЧИХ НАУКАХ ТА ІНФОРМАЦІЙНІ ТЕХНОЛОГІЇ

MATHEMATICAL MODELING IN NATURAL SCIENCES AND INFORMATION TECHNOLOGIES

DOI: 10.31319/2519-8106.2(49)2023.292545
УДК 681.04

Поліський Ю.Д., кандидат технічних наук, заслужений винахідник України
Polissky Yuriy, candidate of technical sciences, honored inventor of Ukraine
e-mail: polissky477@gmail.com

НДІ автоматизації чорної металургії, м. Дніпро
Research institute of automation of ferrous metallurgy, Dnipro

ДОСЛІДЖЕННЯ ОПЕРАЦІЇ ВИЗНАЧЕННЯ НАЛЕЖНОСТІ ЧИСЛА ДО ДАНОЇ ПОЛОВИНИ ІНТЕРВАЛУ ЧИСЕЛ В СИСТЕМІ ЗАЛИШКОВИХ КЛАСІВ З УСІМА ПАРНИМИ МОДУЛЯМИ

STUDY OF THE OPERATION OF DETERMINING THE BELONGING OF A NUMBER TO A GIVEN HALF OF THE NUMBER INTERVAL IN THE SYSTEM OF RESIDUAL CLASSES WITH ALL EVEN MODULES

У роботі досліджено систему залишкових класів з усіма парними модулями щодо визначення належності числа до верхньої або нижньої половини інтервалу чисел.
***Ключові слова**: залишкові класи, системи модулів, інтервал чисел, поліадичний код.*

Increasing the efficiency of calculations, creating high-performance and reliable computing structures can be effectively solved on the basis of the representation of numbers in the system of residual classes. A traditional system of residual classes is a counting system in which an arbitrary number is represented as a set of the smallest non-negative residuals by modules. At the same time, if the modules are pairwise mutually simple, then only one number in the interval of numbers corresponds to this representation. At the same time, the implementation of new trends in the system of residual classes requires, along with the use of systems of mutually simple modules, the use of systems with mutually complex ones, in particular, with all even modules. At the same time, one of the complex operations in such a system is determining whether a number belongs to a given half of the interval of numbers. Knowledge of the belonging of a number to a given half of the interval is a necessary condition for solving a significant number of problems, for example, the most massive task of comparing numbers, based on determining the belonging of these numbers and their difference to a given half of the interval. The considered system of all even modules, each of which is not a factor of any of the other modules of this system, which is built on the basis of a system of mutually simple modules — the basis by multiplying each module of the basis by an even number — the transition coefficient. The algorithm for solving the problem is as follows. An iterative search for a number that is a multiple of the transition coefficient is performed. For this, the closest smaller number to the tested number and the closest larger number to the tested number are selected at the same time. In the future, a number of *checks are carried out for compliance with some criteria. If, after several iterations, the number becomes a multiple of the transition coefficient, then it is divided by this coefficient, and the obtained division result is transferred to the base system of modules, where belonging to the upper or lower half of the interval is established by known methods. The proposed algorithm provides the desired result. It seems appropriate to apply the proposed approach as a prospective direction of research of complex operations in the system of residual classes with all even modules.*

***Keywords**: residual classes, module systems, interval of numbers, polyadic code.*

Постановка проблеми

Підвищення ефективності обчислень, створення високопродуктивних та надійних обчислювальних структур може бути ефективно вирішено на основі представлення чисел у системі залишкових класів. Системою залишкових класів [1] називається система числення, у якій довільне число N представляється як набір найменших невід'ємних залишків по модулях $m_1, m_2, \ldots, m_n$, тобто $N = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Тут $\alpha_i = N(\bmod m_i)$. При цьому, якщо числа m_i попарно взаємно прості, то такому представленню відповідає тільки одне число N інтервалу $[0, M-1]$, де $M = m_1 m_2 \ldots m_n$. До переваг такого представлення чисел належить незалежність розрядів числа один від одного і можливість їхньої паралельної обробки, малорозрядність залишків, висока точність, здатність системи до самокорекції.

Якщо системою модулів поліадичного коду також є система $m_1, m_2, \ldots, m_n$, то число N в поліадичному коді представляється у вигляді

$$N = \pi_1 + \pi_2 m_1 + \ldots + \pi_i m_1 m_2 \ldots m_{i-1} + \cdots + \pi_{n-1} m_1 m_2 \ldots m_{n-2} + \pi_n m_1 m_2 \ldots m_{n-1},$$

де $0 \le \pi_i \le m_i - 1,\ i = 1, 2, \ldots, n$.

Разом з тим реалізація нових напрямів в системі залишкових класів вимагає поряд з використанням систем взаємно простих модулів застосування також і систем з взаємно непростими, зокрема, з усіма парними модулями. В цьому випадку представленню $N = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ відповідають декілька чисел інтервалу $[0, M-1]$. Для вирішення цієї проблеми запропонований [2—5] наступний підхід. Величина M, яка дорівнює добутку в системі попарно взаємно простих модулів, є, власне, найменшим загальним кратним цих модулів, тобто, $M = m_1 m_2 \ldots m_n = \langle m_1, m_2, \ldots, m_n \rangle$. Якщо поняття величини M як найменшого загального кратного узагальнити на систему всіх парних модулів $p_1, p_2, \ldots, p_k$, $L = < p_1, p_2, \ldots, p_k >$, кожен із яких не є співмножником жодного з інших модулів цієї системи, то й у цьому випадку кожному представленню $B = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$, $\beta_i = B(\bmod p_i)$ буде відповідати тільки одне число із $[0, L-1]$.

Числа B інтервалу $[0, L-1]$ підрозділяються на числа нижньої $R1$ половини та числа верхньої $R2$ половини інтервалу, тобто $B \in \begin{cases} R1, 0 \le B \le \frac{L}{2} - 1, \\ R2, \frac{L}{2} \le B \le L - 1 \end{cases}$

Знання про належність числа до даної половини інтервалу є необхідною умовою для вирішення значної кількості задач, наприклад, найбільш масової задачі порівняння чисел, заснованої на визначенні належності цих чисел та їх різниці до даної половини інтервалу — табл. 1.

Таблиця 1.

Співвідношення B_1, B_2, $\Delta = B_1 - B_2$	Результат
$(B_1 \in R1) \cap (B_2 \in R2)$	$B_1 < B_2$
$(B_1 \in R2) \cap (B_2 \in R1)$	$B_1 > B_2$
$(B_1 \in R1) \cap (B_2 \in R1) \cap (\Delta \in R1)$	$B_1 > B_2$

Продовження таблиці 1.

$(B_1 \in R1) \bigcap (B_2 \in R1) \bigcap (\Delta \in R2)$	$B_1 < B_2$
$(B_1 \in R2) \bigcap (B_2 \in R2) \bigcap (\Delta \in R1)$	$B_1 > B_2$
$(B_1 \in R2) \bigcap (B_2 \in R2) \bigcap (\Delta \in R2)$	$B_1 < B_2$

Аналіз останніх досліджень і публікацій

Системі залишкових класів із усіма парними модулями присвячені роботи [2—5]. Розглянуті проблеми перетворення псевдочисел системи залишкових класів з усіма парними модулями у числа системи, проаналізовано спосіб представлення чисел такої системи у поліадичному коді, досліджені позиційні характеристики при представленні чисел у прямому та зворотному кодах системи залишкових класів при всіх парних модулях.

Формулювання мети дослідження

Метою дослідження є аналітичний розгляд системи залишкових класів при всіх парних модулях для реалізації складної базової операції визначення приналежності числа до даної половині інтервалу чисел.

Виклад основного матеріалу

Система всіх парних модулів, кожен із яких не є співмножником жодного з інших модулів цієї системи, будується на основі системи взаємно простих модулів — базису множенням кожного модуля базису на парне число — коефіцієнт переходу. Так, система парних модулів $p_1 = 10, p_2 = 6, p_3 = 4$ отримана множенням кожного модуля базису $m_1 = 5, m_2 = 3, m_3 = 2$ на коефіцієнт переходу $\mu = 2$. Тому число B у поліадичному коді можна також представити, як

$$B = \pi_1 + \pi_2 \mu m_1 + \ldots + \pi_i \mu m_1 m_2, \ldots, m_{i-1} + \ldots + \pi_k \mu m_1 m_2, \ldots, m_{k-1},$$

тобто представлення числа B в поліадичному коді для системи всіх парних модулів з базисом $m_1, m_2, \ldots, m_n$ є також єдиним. На підставі цього число, наприклад, $B_1 = 59$ та $B_2 = 27$, можна отримати, як

$$B_1 = \pi_1 + \pi_2 \mu m_1 + \pi_3 \mu m_1 m_2,$$
$$\mu = 2,\ m_1 = 5,\ m_2 = 3,\ m_3 = 2,\quad \pi_1 = 9,\ \pi_2 = m_2 - 1 = 2,\ \pi_3 = m_3 - 1 = 1,$$
$$B_1 = 59 = 9 + 2*2*5 + 1*2*5*3$$
$$B_2 = \pi_1 + \pi_2 \mu m_1 + \pi_3 \mu m_1 m_2,$$
$$\mu = 2,\ m_1 = 5,\ m_2 = 3,\ m_3 = 2,\quad \pi_1 = 7,\ \pi_2 = m_2 - 1 = 2,\ \pi_3 = 0,$$
$$B_2 = 27 = 7 + 2*2*5 + 0*2*5*3$$

У даній системі, як і у традиційній системі попарно взаємно простих модулів, критерієм належності числа даній половині інтервалу згідно з [6] є значення π_n:

$$B \in \begin{cases} R1, \pi_n = 0, \\ R2, \pi_n = 1 \end{cases}.$$

Тобто, $B_1 = 59 (\pi_3 = 1) \in R2$, $B_2 = 27 (\pi_3 = 0) \in R1$.

Значення π_n отримується за відомим табличним методом. Для цього створюються табл. 2, табл. 3, табл. 4 констант віднімання в системі парних модулів $p_1 = 10, p_2 = 6, p_3 = 4$.

Таблиця 2.

Модулі				
$p_1 = 10$			$p_2 = 6$	$p_3 = 4$
π_1	$\Delta_1 = \pi_1$	$\tilde{\beta}_1 = \tilde{\Delta}_1 = \Delta_1 (\mathrm{mod}10)$	$\tilde{\Delta}_2 = \Delta_1 (\mathrm{mod}6)$	$\tilde{\Delta}_3 = \Delta_1 (\mathrm{mod}4)$
0	0	0	0	0
1	1	1	1	1
2	2	2	2	2
3	3	3	3	3

Продовження таблиці 2.

4	4	4	4	0
5	5	5	5	1
6	6	6	0	2
7	7	7	1	3
8	8	8	2	0
9	9	9	3	1

Таблиця 3.

Модулі			
$p_2 = 6$			$p_3 = 4$
π_2	$\Delta_2 = \pi_2 * 10$	$\tilde{\beta}_2 = \tilde{\Delta}_2 = \Delta_2 (\bmod 6)$	$\tilde{\Delta}_3 = \Delta_2 (\bmod 4)$
0	0	0	0
1	10	4	2
2	20	2	0
3	30	0	2
4	*40*	*4*	*0*
5	*50*	*2*	*2*

Таблиця 4.

Модулі		
$p_3 = 4$		
π_3	$\Delta_3 = \pi_3 \langle 10, 6 \rangle$	$\tilde{\beta}_3 = \tilde{\Delta}_3 = \Delta_3 (\bmod 4)$
0	0	0
1	30	2
2	60	4
3	*90*	*6*

Процедура отримання значення π_n, наприклад, для $B_1 = 59$ ілюструється табл. 5.

Таблиця 5.

Рядок	Число	Модулі		
		10	**6**	**4**
1	**59**	9	5	3
2	□	9	3	1
3	= 50	0	2	2
4	□	x	2	0
5	= 30	x	0	2
6	□	x	x	2
7	= 0	x	x	0

Перший рядок табл. 5 — залишки числа $B_1 = 59$ за модулями $p_1 = 10, p_2 = 6, p_3 = 4$ відповідно $\beta_1 = 9, \beta_2 = 5, \beta_3 = 3$. На першій ітерації по залишку $\beta_1 = 9$ вибираємо з табл.2 значення позиційної характеристики $\pi_1 = 9$ і рядок $(9, 3, 1)$ — другий рядок таблиці, який віднімаємо з першого рядка таблиці. Результат — третій рядок таблиці.

На другій ітерації по залишку $\tilde{\beta}_2=2$ вибираємо з табл. 3 значення позиційної характеристики $\pi_2=2$ та рядок $(2,0)$ — четвертий рядок таблиці, який віднімаємо з другого рядка таблиці. Результат — п'ятий рядок таблиці.

На третій ітерації по залишку $\tilde{\beta}_3=2$ вибираємо з табл.4 значення позиційної характеристики $\pi_3=1$ і рядок (2) — шостий рядок таблиці, який віднімаємо з п'ятого рядка таблиці. Результат — сьомий рядок таблиці.

$$B_1=\pi_1+\pi_2 m_1+\pi_3\langle m_1,m_2\rangle=9+2*10+1*30=59 \ .$$

Оскільки $\pi_3=1$, число $B_1=59$ належить верхній половині інтервалу $[0,L-1]$.

В даній статті пропонується також і ще один алгоритм визначення належності числа B верхній або нижній половині інтервалу $[0,L-1]$. Алгоритм розв'язання задачі полягає в наступному. Здійснюється пошук числа, кратного коефіцієнту переходу μ. Для цього вибираються одночасно найближче до B менше число $B_м$ і найближче до B більше число $B_б$ із $[0,L-1]$. Наприклад, нехай базисною є система модулів $m_1=5, m_2=3, m_3=2$, тобто $M=m_1 m_2 m_3=30$. Нехай коефіцієнт переходу $\mu=10$, тобто $L=M\mu=300$.

Якщо отримане менше число дорівнює $\frac{L}{2}$, то вихідне число, що аналізується, розташоване у верхній половині інтервалу $[0,L-1]$.

Нехай $B=154$.

За алгоритмом на першій ітерації $B_м=153$, $B_б=155$.

В наведеному прикладі на четвертій ітерації отримуємо $\tilde{B}_м=150$. Отже, отримане число дорівнює $\frac{L}{2}$, тобто число $B=154$, що аналізується, розташоване у верхній половині інтервалу $[0,L-1]$.

Якщо ж отримане менше число дорівнює 0, то вихідне число, що аналізується, розташоване в нижній половині інтервалу $[0,L-1]$.

Якщо отримане більше число дорівнює $\frac{L}{2}$, то вихідне число, що аналізується, розташоване в нижній половині інтервалу $[0,L-1]$.

Розглянемо другий приклад. Нехай $B=147$.

За алгоритмом на першій ітерації $B_м=146$, $B_б=148$.

На третій ітерації отримуємо $B_б=150$. Отже, отримане число дорівнює $\frac{L}{2}$, тобто число $B=147$, що аналізується, розташоване у нижній половині інтервалу $[0,L-1]$.

Якщо ж отримане більше число дорівнює $L-1$, то вихідне число, що аналізується, розташоване у верхній половині інтервалу $[0,L-1]$.

Розглянемо наступний приклад. Нехай $B=298$.

За алгоритмом на першій ітерації $B_м=297$, $B_б=299$. Отже, отримане число $B_б$ дорівнює $L-1$, тобто число $B=298$, що аналізується, розташоване у верхній половині інтервалу $[0,L-1]$.

Якщо ж отримане менше або отримане більше число не кратне μ і при цьому жодна з перелічених вище умов не виконується, то вибираються одночасно найближче до $B_м$ менше число $\tilde{B}_м$ і найближче до $B_б$ більше число $\tilde{B}_б$ із $[0,L-1]$, і повторюється перевірка перелічених вище умов.

Якщо після декількох ітерацій $\tilde{B}_м$ або $\tilde{B}_б$ стає кратним μ, то воно ділиться на μ і отриманий результат ділення переходить у базисну систему модулів, де належність до верхньої або нижньої половини інтервалу $[0, M-1]$ встановлюється відомими способами. В наведеному прикладі на четвертій ітерації отримуємо число $\tilde{B}_м = 150$, яке кратне $\mu = 10$. То ж діленням $\tilde{B}_м$ на μ отримуємо $\tilde{B}_{баз} = 15$ і переходимо до базисної системи модулів $m_1 = 5, m_2 = 3, m_3 = 2$, у якій $\tilde{B}_{баз} = 15$ належить до верхньої половини інтервалу $[0, M-1]$. Таким чином і число $B = 154$, яке аналізується, розташоване у верхній половині інтервалу $[0, L-1]$, що співпадає із отриманим вище результатом.

Висновки

Досліджена складна операція визначення належності числа до верхньої або нижньої половини інтервалу чисел в системі залишкових класів з усіма парними модулями. Парні модулі вибираються на підставі базисної системи попарно взаємно простих модулів. Алгоритм заснований на ітераційній процедурі перевірки кратності числа, що іспитується, деякому коефіцієнту для переходу до базисної системи модулів. Для цього вибираються одночасно найближче менше число до числа, що іспитується, і найближче більше число до числа, що іспитується, та виконується перевірка відповідності вимогам певних умов. Якщо після декількох ітерацій отримане найближче менше або найближче більше число стає кратним μ, то воно ділиться на μ і отриманий результат ділення переходить у базисну систему модулів, де належність до верхньої або нижньої половини інтервалу встановлюється відомими способами. Показано, що запропонований алгоритм забезпечує отримання шуканого результату. Представляється доцільним застосувати запропонований підхід в якості перспективного напрямку досліджень складних операцій в системі залишкових класів з усіма парними модулями.

Список використаної літератури

1. Акушскій І.Я., Юдицький Д.І. Машинна арифметика у залишкових класах. М.: *Радянське радіо*. 1968. 440 с.
2. Поліський Ю.Д. Про систему залишкових класів із взаємно непростими модулями. *Проблеми математичного моделювання:* матеріали наук.-метод. конф., м. Кам'янське, 24-26 трав. 2017 р. Дніпропетровськ, 2017. С. 107–112.
3. Поліський Ю.Д. Перетворення псевдочисел системи залишкових класів з усіма парними модулями у числа системи. *Електронне моделювання*. 2018. Т. 40. № 1. С. 115–120.
4. Поліський Ю.Д. Реалізація деяких проблемних операцій у системах залишкових класів. *Математичне моделювання*. 2018. № 1(38). С. 22–27.
5. Поліський Ю.Д. Про позиційну характеристику у системі залишкових класів. *Ways of Science Development in Modern Crisis Conditions: Proceedings of the 4th International Scientific and Practical Internet Conference*, June 8-9, 2023, Dnipro, Ukraine, P. 351–352.
6. Поліський Ю.Д. Вибір критерію належності числа даної половини діапазону у системі залишкових класів. *Проблеми математичного моделювання:* матеріали наук.-метод. конф., м. Дніпродзержинськ, 27-29 трав. 2015 р. Дніпропетровськ, 2016. С. 91–92.

References

[1] Akushsky I.Ya., Yudytsky D.I. (1968). Mashynna aryfmetyka u zalyshkovykh klasakh [Machine arithmetic in residual classes]. Radyanske radio

[2] Polissky Yu.D. (2017). Pro systemu zalyshkovykh klasiv iz vzayemno neprostymy modulyamy [On the system of residual classes with mutually nonprime modules]. Problemy matematychnoho modelyuvannya – *Problems of mathematical modeling*, 107–112 [in Ukranian].

[3] Polissky Yu.D. (2018). Peretvorennya psevdochysel systemy zalyshkovykh klasiv z usima parnymy modulyamy u chysla systemy. [Transformation of pseudo-numbers of the system of residual classes with all even modules into numbers of the system] Elektronne modelyuvannya – *Electronic modeling.* 115–120. [in Ukranian].

[4] Polissky Yu.D. (2018). Realizatsiya deyakykh problemnykh operatsiy u systemakh zalyshkovykh klasiv [Implementation of some problematic operations in residual class systems]. Mathematychne modelyuvannya – *Mathematical modeling*, 22–27 [in Ukranian].

[5] Polissky Yu.D. (2023). Pro pozytsiynu kharakterystyku u systemi zalyshkovykh klasiv [About positional characteristics in the system of residual classes] *Ways of Science Development in Modern Crisis Conditions: Proceedings of the 4th International Scientific and Practical Internet Conference*, 351–352 [in Ukranian].

[6] Polissky Yu.D. (2015). Vybir kryteriyu nalezhnosti chysla danoyi polovyny diapazonu u systemi zalyshkovykh klasiv [Selection of the criterion for belonging to the number of the given half of the range in the system of residual classes] Problemy matematychnoho modelyuvannya – Problems of mathematical modeling, 91–92 [in Ukranian].

Надійшла до редколегії 03.11.2023